SỞ GD&ĐT THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

(Đề thi có 06 trang)

KÌ THI THỬ THPT QUỐC GIA LẦN 2 NĂM 2019
Bài thi: Toán
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

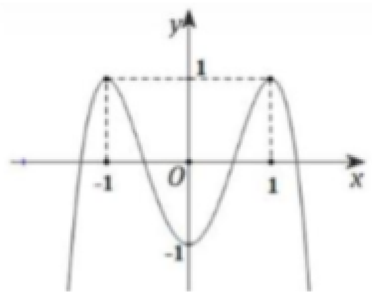
Mã đề thi 103

Họ và tên thí sinh: ....
Số báo danh: ....

Câu 1 (NB): Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M\left(2;0;-1\right)$ và có một véc tơ chỉ phương $\vec{a}=\left(4;-6;2\right)$. Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases}x=-2+4t\\y=6t\\z=1+2t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-1+t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=4+2t\\y=-6\\z=2+t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=-2+2t\\y=3t\\z=1+t\end{cases}$

Câu 2 (TH): Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=-x^4-2x^2-1$ **B.** $y=2x^4+4x^2-1$
C. $y=x^4-2x^2-1$ **D.** $y=-x^4+2x^2-1$

Câu 3 (NB): Trong không gian *Oxyz*, cho mặt phẳng $\left(P\right):3x-z+2=0$. Véc tơ nào dưới đây là một véc tơ pháp tuyến của $\left(P\right)$?

A. $\vec{n}=\left(3;-1;2\right)$ **B.** $\vec{n}=\left(-1;0;-1\right)$ **C.** $\vec{n}=\left(0;3;-1\right)$ **D.** $\vec{n}=\left(3;-1;0\right)$

Câu 4 (NB): Khi quay một tam giác vuông (kể cả các điểm trong của tam giác vuông đó) quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông ta được

A. Hình nón **B.** Khối trụ **C.** Khối nón **D.** Hình trụ

Câu 5 (TH): Cho cấp số cộng $\left(u_n\right)$, biết $u_1=-5,d=2$. Số 81 là số hạng thứ bao nhiêu?

A. 44 **B.** 100 **C.** 75 **D.** 50

Câu 6 (NB): Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, *SA* vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{3}$. Tính thể tích hình chóp *S.ABCD*.

A. $\dfrac{a^3}{3}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $a^3\sqrt{3}$ **D.** $3a^3\sqrt{3}$

Câu 7 (NB): Cho số phức $z=10-2i$. Phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$ là

A. Phần thực bằng -10 và phần ảo của số phức bằng $-2i$.

B. Phần thực bằng -10 và phần ảo bằng -2.

C. Phần thực bằng 10 và phần ảo bằng 2.

D. Phần thực bằng 10 và phần ảo bằng $2i$.

Câu 8 (NB): Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau đây.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y			20				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	-7	$\nearrow$	

A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$

B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -7$

D. Hàm số $y = f(x)$ không có cực trị

Câu 9 (NB): Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ **B.** $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$ **C.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **D.** $y = \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$

Câu 10 (TH): Cho trước 5 chiếc ghế xếp thành một hàng ngang. Số cách xếp 3 bạn A, B, C vào 5 chiếc ghế đó sao cho mỗi bạn 1 ghế là

A. C_5^3 **B.** 6 **C.** A_5^3 **D.** 15

Câu 11 (TH): Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^{2x}$ là

A. $\frac{4^x}{\ln 4} + C$ **B.** $\frac{1}{4^x.\ln 4} + C$ **C.** $4^x + C$ **D.** $4^x.\ln 4 + C$

Câu 12 (NB): Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-2;1;3)$. Hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox có tọa độ là

A. $(0;1;0)$ **B.** $(-2;0;0)$ **C.** $(0;0;3)$ **D.** $(0;1;3)$

Câu 13 (NB): Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;+\infty)$ **B.** $(-1;0)$ **C.** $(-\infty;-1)$ **D.** $(0;+\infty)$

Câu 14 (NB): Cho $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int_1^2 f(x)dx = 2$. Khi đó $\int_0^2 f(x)dx$

A. 1 **B.** -1 **C.** 5 **D.** 6

Câu 15 (NB): Với a và b là hai số thực dương tùy ý, $\log(a^2b^3)$ bằng

A. $\frac{1}{2}\log a + \frac{1}{3}\log b$ **B.** $2\log a + \log b$ **C.** $2\log a + 3\log b$ **D.** $2\log a.3\log b$

Câu 16 (TH): Phương trình $\log(54-x^3)=3\log x$ có nghiệm là

A. $x=4$ **B.** $x=3$ **C.** $x=1$ **D.** $x=2$

Câu 17 (TH): Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x+4y-12=0$. Mặt phẳng nào sau đây cắt (S) theo một đường tròn có bán kính $r=3$?

A. $4x-3y-z-4\sqrt{26}=0$ **B.** $2x+2y-z+12=0$

C. $3x-4y+5z-17+20\sqrt{2}=0$ **D.** $x+y+z+\sqrt{3}=0$

Câu 18 (TH): Cho một khối trụ có độ dài đường sinh bằng $10cm$. Biết thể tích khối trụ bằng $90\pi\left(cm^3\right)$. Diện tích xung quanh của khối trụ bằng

A. $36\pi\, cm^2$ **B.** $78\pi\, cm^2$ **C.** $81\pi\, cm^2$ **D.** $60\pi\, cm^2$

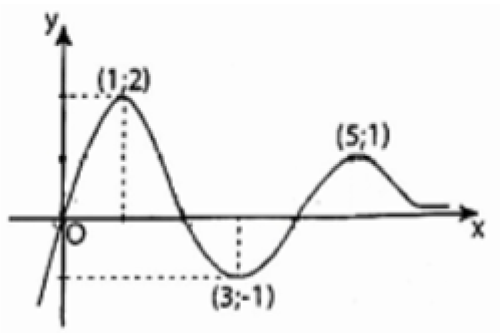
Câu 19 (TH): Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z|-2\bar{z}=-7+3i+z$. Mô đun của số phức $w=1-z+z^2$ bằng

A. $|w|=\sqrt{445}$ **B.** $|w|=\sqrt{425}$ **C.** $|w|=\sqrt{37}$ **D.** $|w|=\sqrt{457}$

Câu 20 (TH): Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$ trên đoạn $[0;1]$. Giá trị của $M+2m$ bằng

A. -11 **B.** -10 **C.** 11 **D.** 10

Câu 21 (TH): Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $|f(x)|=m$ có năm nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;5]$?



A. $m\in(0;1)$ **B.** $m\in(1;+\infty)$

C. $m\in[0;1]$ **D.** $m\in(0;1]$

Câu 22 [TH]: Trong không gian *Oxyz*, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2+y^2+z^2-4x+y-2az+10a=0$. Tập hợp các giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π là

A. $\{1;10\}$ **B.** $\{-10;2\}$ **C.** $\{-1;11\}$ **D.** $\{1;-11\}$

Câu 23 (TH): Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$?

A. $m=2$ hoặc $m=-1$ **B.** $m=2$ hoặc $m=1$

C. $m=1$ **D.** $m=2$

Câu 24 (TH): Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x-6\le 0$ là

A. $S=\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$ **B.** $S=[64;+\infty)$ **C.** $S=\left(0;\dfrac{1}{2}\right]\cup[64;+\infty)$ **D.** $S=\left[\dfrac{1}{2};64\right]$

Câu 25 (TH): Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^x.5^{x^2-2x}=1$. Khi đó tổng x_1+x_2 bằng

A. $2-\log_5 2$ **B.** $-2+\log_5 2$ **C.** $2+\log_5 2$ **D.** $2-\log_2 5$

Câu 26 (TH): Trong mặt phẳng *Oxyz*, gọi *A, B, C* lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1=-3i; z_2=2-2i; z_3=-5-i$. Gọi G là trọng tâm của tam giác *ABC*. Khi đó điểm *G* biểu diễn số phức là

A. $z=-1-i$ **B.** $z=-1-2i$ **C.** $z=1-2i$ **D.** $z=2-i$

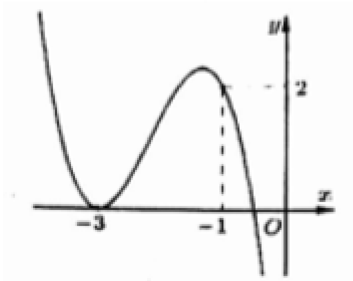
Câu 27 (TH): Cho lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* là tam giác với $AB=a, AC=2a$ và $BAC=120^0, AA'=2a\sqrt{5}$. Tính thể tích *V* của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=a^3\sqrt{15}$ **B.** $V=\dfrac{4a^3\sqrt{5}}{3}$ **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$ **D.** $V=4a^3\sqrt{5}$

Câu 28 (TH): Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{\tan x}; y=0; x=0; x=\dfrac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục *Ox*. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra.

A. $\dfrac{\pi\ln 2}{2}$ **B.** $\dfrac{\pi\ln 3}{4}$ **C.** $\dfrac{\pi}{4}$ **D.** $\pi\ln 2$

Câu 29 (VD): Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[(f(x))^2-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 3 **B.** 2

C. 6 **D.** 4

Câu 30 (VD): Cho tứ diện *ABCD* có $AB=AC=AD$ và $BAC=BAD=60^0$. Xác định góc giữa hai đường thẳng *AB* và *CD*

A. 90^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 30^0

Câu 31 (VD): Cho một miếng tôn hình tròn tâm *O*, bán kính *R*. Cắt bỏ một phần miếng tôn theo một hình quạt *OAB* và gò phần còn lại thành một hình nón đỉnh *O* không có đáy (*OA* trùng với *OB*). Gọi *S* và S' lần lượt là diện tích của miếng tôn hình tròn ban đầu và diện tích của miếng tôn còn lại. Tìm tỉ số $\dfrac{S'}{S}$ để thể tích của khối nón đạt giá trị lớn nhất.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** $\dfrac{1}{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Câu 32 (VD): Số các giá trị nguyên của tham $M\in[-2019;2019]$ để hàm số $y=\dfrac{(m+1)x^2-2mx+6m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 2034 **B.** 2018 **C.** 2025 **D.** 2021

Câu 33 (VD): Cho các số phức *z* thỏa mãn $|z+1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(1+i\sqrt{8})z+i$ là một đường tròn. Bán kính *r* của đường tròn đó là

A. 9 **B.** 36 **C.** 6 **D.** 3

Câu 34 (VD): Tính tổng các giá trị nguyên của tham số $m\in[-50;50]$ sao cho bất phương trình $mx^4-4x+m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. 1272 **B.** 1275 **C.** 1 **D.** 0

Câu 35 (VD): Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log^2|\text{cosx}|-m\log\cos^2x-m^2+4=0$ vô nghiệm.

A. $m\in(\sqrt{2};2)$ **B.** $m\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ **C.** $m\in(-\sqrt{2};2)$ **D.** $m\in(-2;\sqrt{2})$

Câu 36 (VD): Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $(f(x))^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là:

A. $2\sqrt[3]{16}$ **B.** $\sqrt[3]{18}$ **C.** $\sqrt[3]{16}$ **D.** $2\sqrt[3]{18}$

Câu 37 (VD): Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông tâm *O*, cạnh *a*. Cạnh bên *SA* vuông góc với đáy và $SBD=60^0$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *SO*.

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{5}$ **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

Câu 38 (VD): Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(1;0;2), B(3;1;-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)\in(P)$ sao cho $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=9a+3b+6c$.

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Câu 39 (VD): Có 2 học sinh lớp A, 3 học sinh lớp B và 4 học sinh lớp C xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp A không có học sinh lớp B. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy?

A. 108864 **B.** 80640 **C.** 145152 **D.** 217728

Câu 40 (VD): Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x).f'(x)=15x^4+12x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $(f(1))^2$ là

A. 10 **B.** 8 **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Câu 41 (VDC): Cho $x,y>0$ và thỏa mãn $\begin{cases}x^2-xy+3=0\\2x+3y-14\le 0\end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x$?

A. 8 **B.** 0 **C.** 4 **D.** 12

Câu 42 (VDC): Xét các số thực dương *x;y* thỏa mãn $\log_3\frac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\frac{4\sqrt{3}-4}{3}$ **B.** $P_{\min}=\frac{4\sqrt{3}+4}{3}$ **C.** $P_{\min}=\frac{4\sqrt{3}+4}{9}$ **D.** $P_{\min}=\frac{4\sqrt{3}-4}{9}$

Câu 43 (VD): Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy) đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là

$18\pi\, dm^3$. Biết khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước. Tính thể tích nước còn lại trong bình.

A. $27\pi\, dm^3$ **B.** $6\pi\, dm^3$ **C.** $9\pi\, dm^3$ **D.** $24\pi\, dm^3$

Câu 44 (VD): Khi cắt hình nón có chiều cao 16 *cm* và đường kính đáy 24 *cm* bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

A. 170 **B.** 260 **C.** 294 **D.** 208

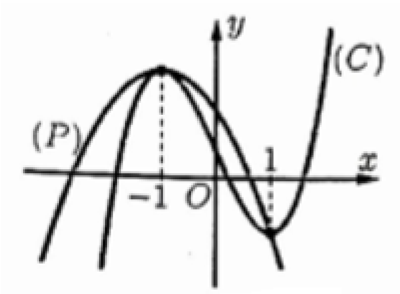
Câu 45 (VDC): Cho hình hộp chữ nhật *ABCD.A'B'C'D'*. Khoảng cách giữa *AB* và *B'C* là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa BC và *AB'* là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa *AC* và *BD'* là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối hộp *ABCD.A'B'C'D'*.

A. $4a^3$ **B.** $3a^3$ **C.** $5a^3$ **D.** $2a^3$

Câu 46 (VD): Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có ba điểm cực trị?

A. Vô số **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Câu 47 (VD): Cho hai hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c\,(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y=mx^2+nx+p\,(m,n,p\in\mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



A. $(0;1)$ **B.** $(1;2)$

C. $(2;3)$ **D.** $(3;4)$

Câu 48 (VD): Trong không gian *Oxyz*, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2;-2;5)$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $(P): x=1, (Q): y=-1$ và $(R): z=1$ có bán kính bằng

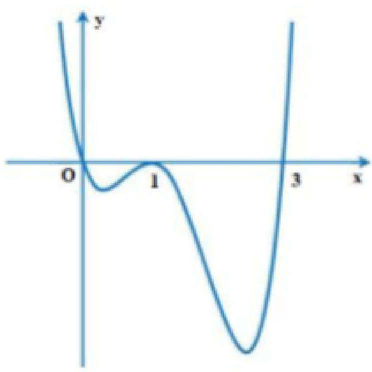
A. 3 **B.** 1 **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** $3\sqrt{3}$

Câu 49 (VD): Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i|=5$ đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* là đường tròn có phương trình

A. $(x-10)^2+(y-6)^2=36$ **B.** $(x-10)^2+(y-6)^2=16$

C. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$ **D.** $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

Câu 50 (VD): Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên tập số thực $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Khi đó, đồ thị của hàm số $y=(f(x))^2$ có



A. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu

B. 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại
C. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu
D. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1.B	**2.B**	**3.C**	**4.C**	**5.A**	**6.B**	**7.C**	**8.B**	**9.B**	**10.C**
11.A	**12.B**	**13.D**	**14.C**	**15.C**	**16.B**	**17.C**	**18.D**	**19.D**	**20.A**
21.A	**22.C**	**23.D**	**24.D**	**25.A**	**26.B**	**27.A**	**28.A**	**29.D**	**30.A**
31.D	**32.D**	**33.C**	**34.A**	**35.C**	**36.C**	**37.D**	**38.B**	**39.C**	**40.B**
41.B	**42.A**	**43.B**	**44.D**	**45.D**	**46.A**	**47.B**	**48.A**	**49.A**	**50.D**

Câu 1:

Phương pháp

Đường thẳng đi qua điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và VTCP $\vec{u}=\left(a;b;c\right)$ có phương trình là $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$

Cách giải:

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M\left(2;0;-1\right)$ và có một véc tơ chỉ phương $\vec{a}=\left(4;-6;2\right)$ hay $\frac{1}{2}\vec{a}=\left(2;-3;1\right)$

nên $\Delta:\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$

Chọn B

Câu 2:

Phương pháp:

+ Xác định rằng đây là đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$

+ Dựa vào đồ thị hàm số xác định dấu của hệ số a

+ Hàm số có ba cực trị thì $ab<0$

+ Xác định một số điểm thuộc đồ thị, thay tọa độ các điểm đó vào các hàm số để loại trừ đáp án.

Cách giải:

Từ đồ thị ta thấy $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-\infty$ nên hệ số $a<0$, loại C

Đồ thị hàm số có 3 cực trị nên $ab<0$ suy ra $b>0$, loại A.

Điểm $\left(1;1\right)$ thuộc đồ thị hàm số nên ta thay $x=1;y=1$ vào các hàm số ở B và D, thấy chỉ có hàm số $y=-2x^4+4x^2-1$ thỏa mãn.

Chọn B.

Câu 3:

Phương pháp:

Mặt phẳng $Ax+By+Cz+D=0$ có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(A;B;C\right)$

Cách giải:

Mặt phẳng $\left(P\right):3x-z+2=0$ có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(3;0;-1\right)$

Chọn C.

Câu 4:

Phương pháp:

Sử dụng kiến thức lý thuyết về khối nón.

Cách giải:

Khi quay một tam giác vuông (kể cả các điểm trong của tam giác vuông đó) quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông ta được một khối nón.

Chọn C.

Chú ý: Một số em nhầm sang đáp án A là hình nón. Ở đây chúng ta lưu ý rằng khi quay tất cả các điểm bên trong tam giác quanh cạnh góc vuông thì ta sẽ được một khối đặc nên ta dược một khối nón chứ không phải hình nón.

Câu 5:

Phương pháp:

Sử dụng công thức tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng $u_n = u_1 + (n-1)d$

Cách giải:

Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)d$ hay $81 = -5 + (n-1).2 \Leftrightarrow n = 44$

Vậy 81 là số hạng thứ 44 của dãy.

Chọn A.

Câu 6:

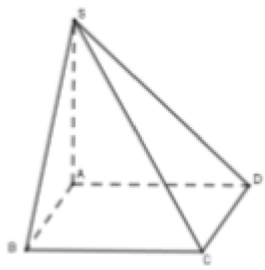
Phương pháp:

Thể tích khối chóp có chiều cao h và diện tích đáy S là $V = \frac{1}{3}h.S$

Cách giải:

Diện tích đáy $S_{ABCD} = a^2$

Thể tích khối chóp là $V_{ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$



Chọn B.

Câu 7:

Phương pháp:

Số phức liên hợp của $z = a + bi$ là $\overline{z} = a - bi$

Cách giải:

Số phức của $z = 10 - 2i$ là $\overline{z} = 10 + 2i$

Vậy phần thực của $\overline{z}$ là 10 và phần ảo 2.

Chọn C.

Câu 8:

Phương pháp

Sử dụng cách đọc bảng biến thiên.

Nếu y' đổi dấu từ âm sang dương tại $x = a$ thì $x = a$ là điểm cực tiểu của hàm số

Nếu y' đổi dấu từ dương sang âm tại $x = b$ thì $x = b$ là điểm cực đại của hàm số

Cách giải:

Từ BBT ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và đạt cực đại tại $x=-2$

Chọn B.

Câu 9:

Phương pháp:

Hàm số $y=a^x\left(0<a\neq 1\right)$ đồng biến nếu $a>1$

Cách giải:

Trong các đáp án đã cho chỉ có đáp án B có hàm số $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$ có $\sqrt{2}>1$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn B.

Câu 10:

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về chỉnh hợp.

Lưu ý rằng nếu chọn các phần tử rồi mang ra sắp xếp thì ta sẽ sử dụng chỉnh hợp.

Cách giải:

Mỗi cách xếp 3 bạn vào 5 chiếc ghế là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử nên số cách xếp có được là A_5^3 (cách).

Chọn C.

Câu 11:

Phương pháp

Nguyên hàm của hàm số $y=a^x\left(0<a\neq 1\right)$ là $\dfrac{a^x}{\ln a}+C$.

Cách giải:

Ta có: $f\left(x\right)=2^{2x}=4^x$ nên nguyên hàm của $f\left(x\right)$ là $\dfrac{4^x}{\ln 4}+C$

Chọn A.

Câu 12:

Phương pháp

Hình chiếu vuông góc của điểm $M\left(a;b;c\right)$ lên trục Ox là $M\left(a;0;0\right)$

Cách giải:

Hình chiếu vuông góc của điểm $A\left(-2;1;3\right)$ lên trục Ox là $A\left(-2;0;0\right)$

Chọn B.

Câu 13:

Phương pháp:

Các khoảng làm cho $y'>0$ thì hàm số đồng biến.

Cách giải:

Ta có: $f'\left(x\right)=x\left(x+1\right)^2>0\Leftrightarrow x>0$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$

Chọn D.

Câu 14:

Phương pháp

Sử dụng tính chất tích phân: $\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx$

Cách giải:

Ta có: $\int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^2 f(x)dx = \int\limits_0^2 f(x)dx \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)dx = 2+3=5$

Chọn C.

Câu 15:

Phương pháp

Sử dụng các công thức biến đổi $\log x^n = n\log x, \log(xy) = \log x + \log y$ với điều kiện các logarit đều có nghĩa.

Cách giải:

Ta có: $\log(a^2b^3) = \log a^2 + \log b^3 = 2\log a + 3\log b\,(a,b>0)$.

Chọn C.

Câu 16:

Phương pháp:

Đưa phương trình về dạng $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$

Cách giải:

Ta có

$\log(54-x^3) = 3\log x \Leftrightarrow \log(54-x^3) = \log x^3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 54-x^3>0 \\ x>0 \\ 54-x^3=x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<3\sqrt[3]{2} \\ 2x^3=54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<3\sqrt[3]{2} \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

Chọn B.

Câu 17:

Phương pháp

- Tính khoảng cách từ tâm mặt cầu đến (P), sử dụng công thức $d=\sqrt{R^2-r^2}$

- Đối chiếu với các đáp án: Kiểm tra $d(I,(P))$ bằng kết quả vừa tìm được ở trên và kết luận.

Cách giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;0)$ và bán kính $R=\sqrt{3^2+0+2^2+12}=5$

Khoảng cách từ I đến (P) là $d(I,(P))=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

Đối chiếu các đáp án ta thấy:

Đáp án A: $d(I,(P))=\dfrac{\left|4.3-3.(-2)-0-4\sqrt{6}\right|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+(-1)^2}} \neq 4$ nên loại A.

Đáp án B: $d\left(I,\left(P\right)\right)=\dfrac{\left|2.3+2.\left(-2\right)-0+12\right|}{\sqrt{2^2+2^2+\left(-1\right)^2}}=\dfrac{14}{3}\ne 4$ nên loại B.

Đáp án C: $d\left(I,\left(P\right)\right)=\dfrac{\left|3.3-4.\left(-2\right)+5.0-17+20\sqrt{2}\right|}{\sqrt{3^2+\left(-4\right)^2+5^2}}=4$ nên chọn C.

Chọn C.

Câu 18:

Phương pháp:

Hình trụ có bán kính đáy r và có chiều cao h thì có diện tích xung quanh $S_{xq}=2\pi rh$ và có thể tích $V=\pi r^2h$. (Với khối trụ thì đường sinh và chiều cao bằng nhau)

Cách giải:

Gọi r là bán kính đáy, theo đề bài ta có $h=10cm;V=90\pi cm^3$

$V=\pi r^2h\Leftrightarrow 90\pi=\pi r^2.10\Rightarrow r=3cm$

Diện tích xung quanh hình trụ là $S_{xq}=2\pi rh=2\pi.3.10=60\pi cm^2$

Chọn D.

Câu 19:

Phương pháp

- Gọi $z=a+bi\left(a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}\right)$

- Thay vào điều kiện bài cho tìm z, từ đó tính w và kết luận.

Cách giải:

Gọi $z=a+bi\left(a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}\right)$, ta có:

$\left|z\right|-2\overline{z}=-7+3i+z\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}-2\left(a-bi\right)=-7+3i+a+bi$

$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}-2a+2bi+7-3i-a-bi=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}-3a+7+\left(b-3\right)i=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-3a+7=0\\b-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\\sqrt{a^2+9}-3a+7=0\left(1\right)\end{cases}$$

Giải $\left(1\right)$ ta có:

$$\sqrt{a^2-9}-3a+7=0\Leftrightarrow\sqrt{a^2-9}=3a-7\Leftrightarrow\begin{cases}3a-7\ge 0\\a^2+9=9a^2-42a+49\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge\dfrac{7}{3}\\8a^2-42a+40=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge\dfrac{7}{3}\\\left[\begin{array}{l}a=4\\a=\dfrac{5}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow a=4(tm)$$

Do đó $a=4,b=3\Rightarrow z=4+3i$

Khi đó $w=1-z+z^2=1-\left(4+3i\right)+\left(4+3i\right)^2=1-4-3i+16+24i-9=4-21i$

Vậy $|w| = \sqrt{4^2 + (-21)^2} = \sqrt{457}$.

Chọn D.

Câu 20:

Phương pháp

+ Tìm điều kiện xác định

+ Xét trên đoạn $[a;b]$. Tính y'; giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm $x_i \in [a;b]$

+ Tính $y(a); y(x_i); y(b)$

+ $\max\limits_{[a;b]} y = \max\limits_{[a;b]} \{y(a); y(x_i); y(b)\}$ và $\min\limits_{[a;b]} y = \min\limits_{[a;b]} \{y(a); y(x_i); y(b)\}$

Từ đó xác định $M; m \Rightarrow M + 2m$

Cách giải:

ĐKXĐ: $x \neq 2$

Xét trên đoạn $[0;1]$ ta có

Ta có $y' = \dfrac{(2x-3)(x-2) - (x^2 - 3x + 6)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0(tm) \\ x = 4(ktm) \end{array}\right.$

$\begin{cases} y(0) = -3 \\ y(1) = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = \max\limits_{[0;1]} y = -3 \\ m = \min\limits_{[0;1]} y = -4 \end{cases} \Rightarrow M = 2m = -3 + 2.(-4) = -11$

Chọn A.

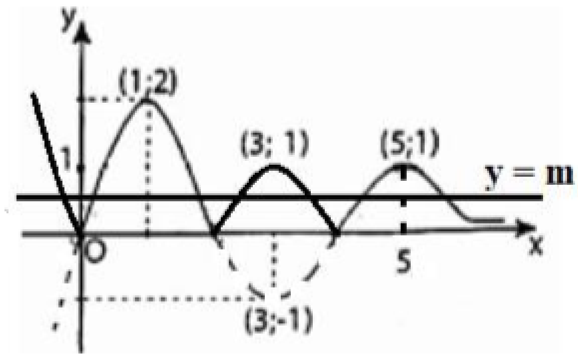
Câu 21:

Phương pháp:

- Vẽ phác đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ đã cho (lấy đối xứng phần dưới trục hoành qua trục hoành và giữ nguyên phần phía trên trục hoành).
- Sử dụng tương giao đồ thị suy ra tập giá trị của *m*.

Cách giải:

Từ đồ thị hàm số đã cho ta dựng được đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau:



Quan sát đồ thị hàm số ta thấy, trên đoạn $[0;5]$ thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ tại đúng 5 điểm phân biệt nếu và chỉ nếu $0 < m < 1$

Chọn A.

Câu 22:

Phương pháp:

Xác định tâm và bán kính mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Chu vi đường tròn bán kính *R* là $C = 2\pi R$

Cách giải:

Mặt cầu $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2az+10a=0$ có:

+) Tâm $I(2;-1;a)$

+) Bán kính $R=\sqrt{2^2+(-1)^2+a^2-10a}=\sqrt{a^2-10a+5}$ với điều kiện $a^2-10a+5>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>5+2\sqrt{5} \\ a<5-2\sqrt{5} \end{array}\right.$

Đường tròn lớn của hình cầu có bán kính $R=\sqrt{a^2-10a+5}$ nên chu vi $C=2\pi\sqrt{a^2-10a+5}$

Theo đề bài ta có:

$C=8\pi \Leftrightarrow 2\pi\sqrt{a^2-10a+5}=8\pi \Leftrightarrow \sqrt{a^2-10a+5}=4$

$\Leftrightarrow a^2-10a+5=16 \Leftrightarrow a^2-10a-11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=11 \end{array}\right.(tm)$

Vậy $a=\{-1;11\}$

Chọn C.

Câu 23:

Phương pháp

Hàm số bậc ba $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=x_0$ nếu $\left\{\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{array}\right.$

Cách giải:

Đặt $y=f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$

Ta có: $f'(x)=x^2-2mx+m^2-m+1; f''(x)=2x-2m$

Hàm số đạt cực đại tại $x=1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(1)=0 \\ f''(1)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1^2-2m.1+m^2-m+1=0 \\ 2.1-2m<0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2-3m+2=0 \\ 2-2m<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right. \\ m>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=2$

Chọn D.

Câu 24:

Phương pháp

+) Tìm điều kiện xác định.

+) Phân tích vế trái thành nhân tử rồi giải bất phương trìn (hoặc đặt ẩn phụ $\log_2 x=t$)

Cách giải:

ĐK: $x>0$.

Ta có

$\log_2^2 x-5\log_2 x-6\le 0 \Leftrightarrow (\log_2 x+1)(\log_2 x-6)\le 0$

$\Leftrightarrow -1\le \log_2 x\le 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\le x\le 64$

Kết hợp điều kiện ta có $S=\left[\frac{1}{2};64\right]$

Chọn D.

Câu 25:

Phương pháp:

- Logarit hai vế theo cơ số 5 đưa về phương trình tích.
- Giải phương trình tìm nghiệm và kết luận.

Cách giải:

Ta có:

$$2^x.5^{x^2-2x}=1\Leftrightarrow \log_5\left(2^x.5^{x^2-2x}\right)=\log_5 1\Leftrightarrow \log_5 2^x+\log_5 5^{x^2-2x}=0$$

$$\Leftrightarrow x\log_5 2+\left(x^2-2x\right)\log_5 5=0\Leftrightarrow x\log_5 2+x^2-2x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\log_5 2+x-2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x-2+\log_5 2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2-\log_5 2\end{array}\right.$$

Vậy tổng hai nghiệm $0+\left(2-\log_5 2\right)=2-\log_5 2$

Chọn A.

Câu 26:

Phương pháp

+) Điểm $z=a+bi\left(a;b\in\mathbb{R}\right)$ có điểm biểu diễn hình học là $M\left(a;b\right)$

+) Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ $\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}$

Cách giải:

Từ bài ra ta có $A\left(0;-3\right),B\left(2;-2\right),C\left(-5;-1\right)$

$\Rightarrow$ Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ $\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{0+2+\left(-5\right)}{3}=-1\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{-3+\left(-2\right)+\left(-1\right)}{3}=-2\end{cases}\Rightarrow G\left(-1;-2\right)$

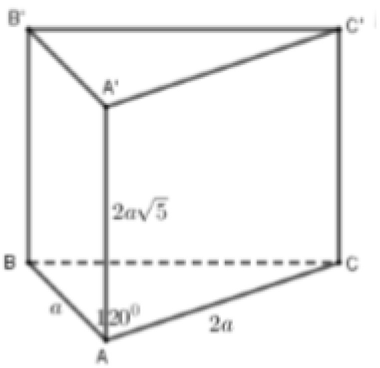
Điểm $G\left(-1;-2\right)$ biểu diễn số phức $z=-1-2i$.

Chọn B.

Câu 27:

Phương pháp:

Thể tích lăng trụ $V=Bh$ với B là diện tích đáy, h là chiều cao.



Cách giải:

Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Thể tích lăng trụ $V=S_{ABC}.AA'=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.2a\sqrt{5}=a^3\sqrt{15}$

Chọn A.

Câu 28:

Phương pháp:

Thể tích vật thể được sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x); y=0; x=a; x=b$ quanh trục Ox là $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$

Cách giải:

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{\tan x}\right)^2 dx=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$$=-\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}d(\cos x)=-\pi\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\pi\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\pi\ln\sqrt{2}=\frac{\pi\ln 2}{2}$$

Chọn A.

Câu 29:

Phương pháp:

- Viết lại $f(x)$ dưới dạng tích, thay vào $g(x)$

- Tìm các điểm làm cho $g(x)$ không xác định và tính giới hạn của hàm số $y=g(x)$ khi x dần tới các điểm đó.

- Sử dụng định nghĩa tiệm cận đứng và kết luận.

Cách giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x\neq 0 \\ x^2+x\geq 0 \\ \left(f(x)\right)^2-2f(x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x\leq -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} f(x)\neq 0 \\ f(x)\neq 2 \end{array}\right. \end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta thấy phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x=-3$ (bội 2) và nghiệm đơn $x=x_0\in(-1;0)$ nên ta viết lại $f(x)=a(x+3)^2(x-x_0)$

Khi đó $g(x)=\frac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[\left(f(x)\right)^2-2f(x)\right]}=\frac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x.f(x)\left[f(x)-2\right]}$

Dựa vào đồ thị ta cũng thấy, đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt $x=-1, x=x_1\in(-3;-1), x=x_2<-3$ nên ta viết lại $f(x)-2=a(x+1)(x-x_1)(x-x_2)$

Khi đó $g(x)=\frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x^2+x}}{x.a(x+3)^2.(x-x_0).a(x+1)(x-x_1)(x-x_2)}$

$$= \frac{\sqrt{x^2+x}}{a^2x(x+3)(x-x_0)(x-x_1)(x-2)}$$

Dễ thấy $x = x_0 \in (-1;0)$ nên ta không xét giới hạn của hàm số tại điểm x_0

Ta có:

+) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} = \dfrac{\sqrt{x+1}}{a^2\sqrt{x}(x+3)(x-x_0)(x-x_1)(x-2)} = +\infty$

$\Rightarrow x = 0$ là đường TCĐ của đồ thị hàm số $y = g(x)$

+) $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = \lim\limits_{x\to x_1} g(x) = \lim\limits_{x\to x_2} g(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ Các đường thẳng $x = -3, x = x_1, x = x_2$ đều là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có tất cả 4 đường tiệm cận đứng.

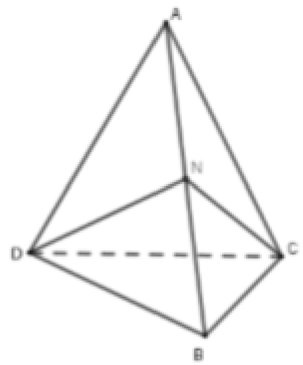
Chọn D.

Câu 30:

Phương pháp:

Lấy N là trung điểm AB. Chứng minh $AB \perp (NCD)$ từ đó suy ra góc giữa AB và CD.

Cách giải:



Các tam giác ABC và ABD đều là tam giác cân có 1 góc bằng 60^0 (gt) nên $\Delta ABC; \Delta ABD$ là các tam giác đều.

Lấy N là trung điểm AB. Khi đó $CN \perp AB; DN \perp AB$ (tính chất tam giác đều)

$\Rightarrow AB \perp (DCN) \Rightarrow AB \perp DC$

Nên góc giữa AB và CD là 90^0.

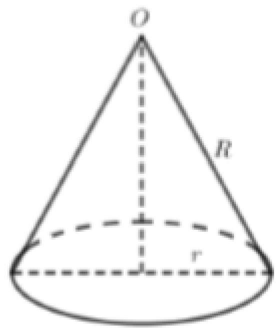
Chọn A.

Câu 31:

Phương pháp:

- Lập hàm tinh thể tích khối nón, xét hàm suy ra GTLN.
- Tính diện tích S, S' với chú ý S là diện tích hình tròn và S' là diện tích xung quanh của hình nón.

Cách giải:



Diện tích hình tròn $S = \pi R^2$

Gọi bán kính đường tròn đáy hình nón là $r\,(0 < r < R)$ ta có

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$$

Xét hàm $f(r) = r^2\sqrt{R^2 - r^2}$ có

$$f'(r) = 2r\sqrt{R^2-r^2} + r^2.\frac{-r}{\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{2r(R^2-r^2)-r^3}{(R^2-r^2)\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{r(2R^2-3r^2)}{(R^2-r^2)\sqrt{R^2-r^2}}$$

$f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(do\, 0 < r < R \right):$

Bảng biến thiên:

r	0		$\dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$		R
$f'(r)$		$+$	0	-	
$f(r)$		$\nearrow$	$f_{\max}$	$\searrow$	

Do đó thể tích V đạt GTLN tại $r = \dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Khi đó $S' = S_{xq} = \pi rl = \pi.\dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.R = \dfrac{\pi R^2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Vậy $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{\pi R^2\sqrt{2}}{3} : \pi R^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Chọn D.

Câu 32:

Phương pháp:

+) Tính đạo hàm y'

+) Để hàm số đồng biến trên khoảng K thì $y' \ge 0; \forall x \in K$

+) Cô lập m đưa về dạng $g(x) \ge m; \forall x \in K$ từ đó suy ra m.

Cách giải:

ĐK: $x \ne 1$

Ta có $y' = \dfrac{\left[2(m+1)x - 2m \right].(x-1) - (m+1)x^2 + 2mx - 6m}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{2(m+1)x^2 - 2(m+1)x - 2mx + 2m - (m+1)x^2 + 2mx - 6m}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{(m+1)x^2 - 2(m+1)x - 4m}{(x-1)^2}$

Để hàm số đồng biến trên $(4;+\infty)$ thì $y' \ge 0; \forall x > 4$

$\Rightarrow (m+1)x^2 - 2(m+1)x - 4m \ge 0; \forall x > 4$

$\Leftrightarrow (m+1)(x^2 - 2x) \ge 4m; \forall x > 4$

+ Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow 0 > -4$ (luôn đúng) nên nhận $m = -1.(1)$

+ Với $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1 \Rightarrow x^2 - 2x \ge \dfrac{4m}{m+1}; \forall x > 4 \Leftrightarrow \dfrac{4m}{m+1} \le \min\limits_{[4;+\infty)} (x^2 - 2x)$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x$ có $g'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin (4;+\infty)$, ta có BBT trên $(4;+\infty)$ là

x	4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra $\begin{cases} \dfrac{4m}{m+1} \le 8 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m \le 8m + 8 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -2 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1 \, (2)$

+ Với $m+1<0 \Leftrightarrow m<-1 \Rightarrow x^2 - 2x \le \dfrac{4m}{m+1}; \forall x > 4 \Rightarrow \dfrac{4m}{m+1} \ge \max\limits_{(4;+\infty)} g(x)$

Từ BBT của $g(x)$ suy ra không có m thỏa mãn.

Từ (1) và (2) suy ra $m \ge -1$ mà $m \in [-2019;2019]$ và m nguyên nên $m \in \{-1;0;...;2019\}$ $\Rightarrow$ có 2021 số thỏa mãn.

Chọn D.

Câu 33:

Phương pháp:

+) Rút z theo w, thay vào giả thiết $|z+1| = 2$

+) Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức thỏa mãn $|\mathrm{w} - (a+bi)| = r$ là đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính r

Cách giải:

Ta có $\mathrm{w} = \left(1 + i\sqrt{8}\right)z + i \Leftrightarrow z = \dfrac{\mathrm{w} - i}{1 + i\sqrt{8}}$

Theo bài ra ta có: $|z+1| = 2 \Leftrightarrow \left| \dfrac{\mathrm{w} - i}{1 + i\sqrt{8}} + 1 \right| = 2$

$\Leftrightarrow \left| \dfrac{\mathrm{w} - i + 1 + i\sqrt{8}}{1 + i\sqrt{8}} \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \mathrm{w} - \left[-1 + \left(1 + i\sqrt{8}\right)i \right] \right| = 2\left|1 + i\sqrt{8}\right|$

$\Leftrightarrow \left| \mathrm{w} - \left[-1 + \left(1 + i\sqrt{8}\right)i \right] \right| = 2\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2} = 6$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(-1; 1 - \sqrt{8}\right)$, bán kính $r = 6$

Chọn C.

Câu 34:

Phương pháp:

Cô lập m đưa bất phương trình về dạng $m \ge f(x); \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $m \ge \max\limits_{\mathbb{R}} f(x)$

Ta tính $f'(x)$ rồi lập BBT của $f(x)$ và kết luận.

Cách giải:

Ta có $mx^4-4x+m\ge 0\Leftrightarrow m\left(x^4+1\right)\ge 4x\Leftrightarrow m\ge\dfrac{4x}{x^4+1}=f\left(x\right)\left(Do\,x^4+1>0\,\forall x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow m\ge\max\limits_{\mathbb{R}} f\left(x\right)$

Xét hàm $f\left(x\right)=\dfrac{4x}{x^4+1}$ trên $\mathbb{R}$

Ta có $f'\left(x\right)=4\dfrac{x^4+1-x.4x^3}{\left(x^4+1\right)^2}=4.\dfrac{-3x^4+1}{\left(x^4+1\right)^2}=4.\dfrac{\left(1-\sqrt{3}x^2\right)\left(1+\sqrt{3}x^2\right)}{\left(x^4+1\right)^2}$

Từ đó $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\\x=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\end{array}\right.$

Ta có BBT:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		-		+		-	
$f\left(x\right)$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{\sqrt[4]{3}}$	$\nearrow$	$\frac{3}{\sqrt[4]{3}}$	$\searrow$	0

Từ BBT suy ra $m\ge\dfrac{3}{\sqrt[4]{3}}\approx 2,27$ mà m nguyên và $m\in\left[-50;50\right]\Rightarrow m\in\left\{3;4;...;50\right\}$

Tổng $S=3+4+...+50=\dfrac{\left(3+50\right).48}{2}=1272$

Chọn A.

Câu 35:

Phương pháp:

- Đặt $t=\log\left|\cos x\right|$ và tìm điều kiện của t.
- Thay vào phương trình đã cho đưa về phương trình ẩn t.
- Biến đổi điều kiện bài toán về điều kiện của phương trình vừa có được và tìm m.

Cách giải:

Điều kiện: $\cos x\ne 0\Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\mathrm{k}\in\mathbb{Z}$

Ta có: $\log^2\left|\cos x\right|-m\log\cos^2x-m^2+4=0$

$\Leftrightarrow\log^2\left|\cos x\right|-2m\log\left|\cos x\right|-m^2+4=0$

Đặt $t=\log\left|\cos x\right|$. Do $0<\left|\cos x\right|\le 1$ nên $\log\left|\cos x\right|\le 0$ hay $t\in\left(-\infty;0\right]$

Phương trình trở thành $t^2-2mt-m^2+4=0(*)$ có $\Delta'=m^2+m^2-4=2m^2-4$

Phương trình đã cho vô nghiệm nếu và chỉ nếu phương trình (*) vô nghiệm hoặc có 2 nghiệm (không nhất thiết phân biệt) t_1,t_2 thỏa mãn $0<t_1\le t_2$

TH1: (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=2m^2-4<0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

TH2: (*) có hai nghiệm thỏa mãn $0<t_1\le t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'\ge 0\\ t_1+t_2>0\\ t_1t_2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2m^2-4\ge 0\\ 2m>0\\ -m^2+4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\ge\sqrt{2}\\ m\le-\sqrt{2}\end{array}\right.\\ m>0\\ -2<m<2\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2}<m<2$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m\in\left(-\sqrt{2};2\right)$

Chọn C.

Câu 36:

Phương pháp:

+) Lấy nguyên hàm hai vế của đẳng thức ở đề bài, từ đó ta tìm được $f(x)$. (sử dụng phương pháp đưa vào trong vi phân $f'(x)dx=d\left(f(x)\right)$

+) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[a;b]$. Ta giải phương trình $f'(x)=0$ tìm các nghiệm $x_i\in[a;b]$

+) Khi đó $\max\limits_{[a;b]} f(x)=\max\left\{f(a);f(x_i);f(b)\right\}$

Cách giải:

Ta có $\left(f(x)\right)^2.f'(x)=3x^2+4x+2 \Rightarrow \int\left(f(x)\right)^2.f'(x)dx=\int\left(3x^2+4x+2\right)dx$

$$\Leftrightarrow \int\left(f(x)\right)^2 d\left(f(x)\right)=x^3+2x^2+2x+C \Leftrightarrow \frac{\left(f(x)\right)^3}{3}=x^3+2x^2+2x+C$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)\right)^3=3x^3+6x^2+6x+3C$$

Ta có: $f(0)=1\Rightarrow 1=3C\Rightarrow \left(f(x)\right)^3=3x^3+6x^2+6x+1$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{3x^3+6x^2+6x+1}$$

Xét hàm $f(x)=\sqrt[3]{3x^3+6x^2+6x+1}$ trên $[-2;1]$

Ta có

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(9x^2+12x+6\right)\sqrt[3]{\left(3x^3+6x^2+6x+1\right)^2}$$

$$=\left(3x^2+4x+2\right)\sqrt[3]{\left(3x^3+6x^2+6x+1\right)^2}$$

$$=3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right)\sqrt[3]{\left(3x^3+6x^2+6x+1\right)^2}$$

$$=3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right]\sqrt[3]{\left(3x^3+6x^2+6x+1\right)^2}$$

Nhận thấy $f'(x)>0\,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(-2;1)$

Suy ra $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(1)=\sqrt[3]{16}$

Chọn C.

Câu 37:

Phương pháp:

- Dựng mặt phẳng chứa SO và song song với AB .

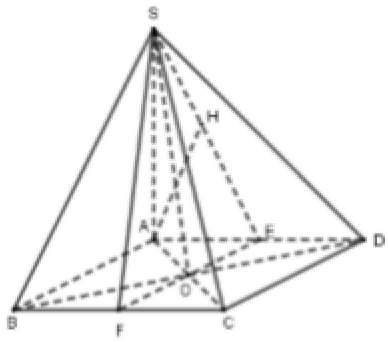
- Sử dụng lý thuyết: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách từ đường thẳng này đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng kia.

- Đưa bài toán về tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng và kết luận.

Cách giải:

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC thì $AB//EF \Rightarrow AB//(SEF)$

Mà $SO\subset(SEF)\Rightarrow d(AB,SO)=d(AB,(SEF))=d(A,(SEF))$



Dựng $AH\perp SE$

Ta thấy: $FE//AB,\ AB\perp(SAD)\Rightarrow FE\perp(SAD)\Rightarrow FE\perp AH$

Mà $AH\perp SE$ nên $AH\perp(SEF)\Rightarrow d(A,(SEF))=AH$

$ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $BD=a\sqrt{2}$

Dễ dàng chứng minh được $\Delta SAB=\Delta SAD\,(c.g.c)\Rightarrow SB=SD$

Tam giác SBD cân có $SBD=60^0$ nên đều $\Rightarrow SD=BD=a\sqrt{2}$

Tam giác SAD vuông tại A có $SA=\sqrt{SD^2-AD^2}=\sqrt{2a^2-a^2}=a$

Tam giác SAE vuông tại A có $SA=a, AE=\frac{1}{2}AD=\frac{a}{2}\Rightarrow SE=\sqrt{SA^2-AE^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Do đó $AH=\dfrac{SA.AE}{SE}=\dfrac{a.\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

Chọn D.

Câu 38:

Phương pháp:

+ Tìm điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

+ Đưa biểu thức cần tìm về MI từ đó lập luận để có M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

+ Viết phương trình đường thẳng d qua I và nhận $\overrightarrow{n_P}$ làm VTCP.

+ Điểm M là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P)

Cách giải:

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1-x;-y;2-z);\overrightarrow{IB}=(3-x;1-y;-1-z)$

Khi đó $3\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\begin{cases}3-3x=6-2x\\-3y=2-2y\\6-3z=-2-2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-2\Rightarrow I(-3;-2;8)\\z=8\end{cases}$

Ta có:

$3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)-2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\overrightarrow{MI}+\left(3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}\right)=\overrightarrow{MI}$ (vì $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$)

Khi đó $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Phương trình đường thẳng d qua $I(-3;-2;8)$ và vuông góc với (P) là $d:\begin{cases}x=-3+t\\y=-2+t\\z=8+t\end{cases}$

Suy ra $M=d\cap(P)$ nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x=-3+t\\y=-2+t\\z=8+t\\x+y+z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3+t\\y=-2+t\\z=8+t\\-3+t-2+t+8+t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{2}{3}\\x=-\dfrac{11}{3}\\y=-\dfrac{8}{3}\\z=\dfrac{22}{3}\end{cases}\Rightarrow M\left(-\dfrac{11}{3};-\dfrac{8}{3};\dfrac{22}{3}\right)$$

Từ đó $a=-\dfrac{11}{3};b=-\dfrac{8}{3};c=\dfrac{22}{3}\Rightarrow S=9a+3b+6c=-33-8+44=3$

Chọn B.

Câu 39:

Phương pháp:

Sử dụng quy tắc vách ngăn.

Cách giải:

Xếp 2 học sinh lớp A có 2! cách xếp, khi đó tạo ra 3 khoảng trống trong đó có 1 khoảng trống giữa 2 bạn lớp A.

Xếp bạn lớp B thứ nhất vào 1 trong 2 khoảng trống không ở giữa 2 bạn lớp A có 2 cách, khi đó tạo ra 4 khoảng trống trong đó có 1 khoảng trống giữa 2 bạn lớp A.

Xếp bạn lớp B thứ 2 vào 1 trong 3 khoảng trống không ở giữa 2 bạn lớp A có 3 cách, khi đó tạo ra 5 khoảng trống trong đó có 1 khoảng trống giữa 2 bạn lớp A.

Xếp bạn lớp B thứ 3 vào 1 trong 4 khoảng trống không ở giữa 2 bạn lớp A có 4 cách, khi đó tạo ra 6 khoảng trống trong đó có 1 khoảng trống giữa 2 bạn lớp A.

Xếp bạn lớp C thứ nhất vào 1 trong 6 khoảng trống (kể cả khoảng trống giữa 2 bạn lớp A) có 6 cách, khi đó tạo ra 7 khoảng trống.

Cứ như vậy ta có :

Xếp bạn lớp C thứ hai có 7 cách.

Xếp bạn lớp C thứ ba có 8 cách.

Xếp bạn lớp C thứ tư có 9 cách.

Vậy số cách xếp 9 học sinh trên thỏa mãn yêu cầu là $2!.2.3.4.6.7.8.9=145152$ cách.

Chọn C.

Câu 40:

Phương pháp:

Sử dụng đạo hàm $\left(f\left(x\right).f'\left(x\right)\right)'=\left(f'\left(x\right)\right)^2+f\left(x\right).f''\left(x\right)$

- Lấy nguyên hàm hai vế liên tiếp 2 lần tìm $f\left(x\right)$ và kết luận.

Cách giải:

Ta có $\left(f\left(x\right).f'\left(x\right)\right)'=f'\left(x\right).f'\left(x\right)+f\left(x\right).\left(f'\left(x\right)\right)'=\left(f'\left(x\right)\right)^2+f\left(x\right).f''\left(x\right)$

Nên $\left(f'\left(x\right)\right)^2+f\left(x\right).f''\left(x\right)=15x^4+12x\Leftrightarrow\left(f\left(x\right).f'\left(x\right)\right)'=15x^4+12x$

Lấy nguyên hàm hai vế ta có:

$\int\left(f\left(x\right).f'\left(x\right)\right)'\mathrm{dx}=\int\left(15x^4+12x\right)dx\Leftrightarrow f'\left(x\right).f\left(x\right)=3x^5+6x^2+C$

Thay $x=0$ vào ta được $f'\left(0\right).f\left(0\right)=C\Leftrightarrow C=1\Rightarrow f\left(x\right).f'\left(x\right)=3x^5+6x^2+1$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được $\int f\left(x\right).f'\left(x\right)\mathrm{dx}=\int\left(3x^5+6x^2+1\right)dx$

$$\Leftrightarrow\int f\left(x\right)d\left(f\left(x\right)\right)=\frac{x^6}{2}+2x^3+x+C_1\Leftrightarrow\frac{\left(f\left(x\right)\right)^2}{2}=\frac{x^6}{2}+2x^3+x+C_1$$

$$\Leftrightarrow\left(f\left(x\right)\right)^2=x^6+4x^3+2x+2C_1$$

Lại có $f\left(0\right)=1\Rightarrow 2C_1=1\Rightarrow\left(f\left(x\right)\right)^2=x^6+4x^3+2x+1$

Suy ra $\left(f\left(1\right)\right)^2=8$

Chọn B.

Câu 41:

Phương pháp:

- Rút y từ phương trình đầu, thay vào bất phương trình sau tìm điều kiện của x .
- Thay y ở trên vào biểu thức P đưa về biến x .
- Sử dụng phương pháp hàm số đánh giá P tìm GTLN, GTNN.

Cách giải:

Ta có: $\begin{cases}x^2-xy+3=0\left(1\right)\\2x+3y-14\le 0\left(2\right)\end{cases}$

Do $x,y>0$ nên $\left(1\right)\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2+3}{x}$ thay vào (2) ta được:

$$2x+3.\frac{x^2+3}{x}-14\le 0\Leftrightarrow\frac{2x^2+3x^2+9-14x}{x}\le 0\Leftrightarrow 5x^2-14x+9\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le\frac{9}{5}$$

Thay $y=\dfrac{x^2+3}{x}$ vào P ta được:

$$P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x=3x^2.\frac{x^2+3}{x}-x.\left(\frac{x^2+3}{x}\right)^2-2x^3+2x$$

$$=3x\left(x^2+3\right)-\frac{\left(x^2+3\right)^2}{x}-2x^3+2x$$

$$=\frac{3x^2\left(x^2+3\right)-\left(x^4+6x^2+9\right)-2x^4+2x^2}{x}=\frac{5x^2-9}{x}=5x-\frac{9}{x}$$

$P'=5+\dfrac{9}{x^2}>0$ với mọi x nên hàm số $P=P\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$

Vậy $P_{\max}=P\left(\dfrac{9}{5}\right)=4, P_{\min}=P\left(1\right)=-4$

Tổng $P_{\max}+P_{\min}=4+\left(-4\right)=0$.

Chọn B

Câu 42:

Phương pháp:

+ Biến đổi giả thiết để sử dụng nếu hàm $f\left(t\right)$ đồng biến thì $f\left(x\right)=f\left(y\right)\Leftrightarrow x=y$

+ Biến đổi đưa P về hàm số chứa 1 biến x hoặc y rồi tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số thu được.

Cách giải:

ĐK: $\dfrac{1-y}{x+3xy}>0\Rightarrow y<1\left(x;y>0\right)$

Ta có

$$\log_3\frac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(1-y\right)-\log_3\left(x+3xy\right)=x+3xy+3\left(y-1\right)-1$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(1-y\right)+3\left(1-y\right)=\log_3\frac{\left(x+3xy\right)}{3}+\left(x+3xy\right)(*)$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_3 t+3t\left(t>0\right)$ có $f'\left(t\right)=\dfrac{1}{t\ln 3}+3>0;\forall t>0$ nên hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$

Kết hợp (*) suy ra $f\left(1-y\right)=f\left(\dfrac{x+3xy}{3}\right)\Leftrightarrow\dfrac{x+3xy}{3}=1-y$

$$\Leftrightarrow x+3xy=3-3y\Leftrightarrow x+3xy+3y-3=0(**)$$

Xét $P=x+y\Rightarrow x=P-y$ thay vào (**) ta được

$$P-y+3\left(P-y\right)y+3y-3=0\Leftrightarrow P(3y+1)=3y^2-2y+3$$

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của $g\left(y\right)=\dfrac{3y^2-2y+3}{3y+1}$ trên $\left(0;1\right)$

Ta có $g'\left(y\right)=\dfrac{(6y-2)(3y+1)-3\left(3y^2-2y+3\right)}{\left(3y+1\right)^2}=\dfrac{9y^2+6y-11}{\left(3y+1\right)^2}$

Giải phương trình $g'(y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-1+2\sqrt{3}}{3}\in(0;1) \\ y=\dfrac{-1-2\sqrt{3}}{3}\notin(0;1) \end{array}\right.$

Lại có $g'(y)<0\,\forall y\in\left(0;\dfrac{-1+2\sqrt{3}}{3}\right)$ và $g'(y)>0\,\forall y\in\left(\dfrac{-1+2\sqrt{3}}{3};1\right)$

Hay $g'(y)$ đổi dấu từ âm sang dương tại $y=\dfrac{-1+2\sqrt{3}}{3}$ nên

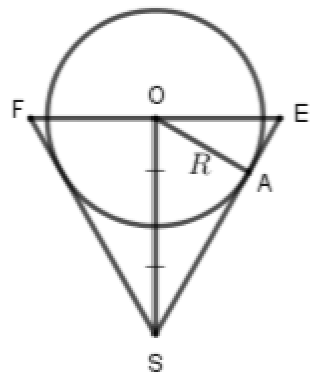
$$\min_{(0;1)} g(y)=g\left(\dfrac{-1+2\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}\Rightarrow P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$$

Chọn A.

Câu 43:

Phương pháp:

- Tính bán kính khối cầu.
- Tính bán kính đáy hình nón và suy ra thể tích.
- Tính thể tích phần nước còn lại.



Cách giải:

Gọi bán kính khối cầu là R ta có: $18\pi=\dfrac{1}{2}V_c=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\pi R^3\Leftrightarrow R=3dm$

Khi đó chiều cao hình nón $h=OS=2R=6dm$

Xét tam giác OES vuông tại O, đường cao OA nên

$$\dfrac{1}{OA^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OE^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{OE^2}=\dfrac{1}{OA^2}-\dfrac{1}{SO^2}=\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{12}\Rightarrow OE^2=12\Leftrightarrow OE=2\sqrt{3}dm$$

Thể tích khối nón: $V_n=\dfrac{1}{3}\pi OE^2.OS=\dfrac{1}{3}\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2.6=24\pi dm^3$

Thể tích nước còn lại là: $V=24\pi-18\pi=6\pi\, dm^3$

Chọn B.

Câu 44:

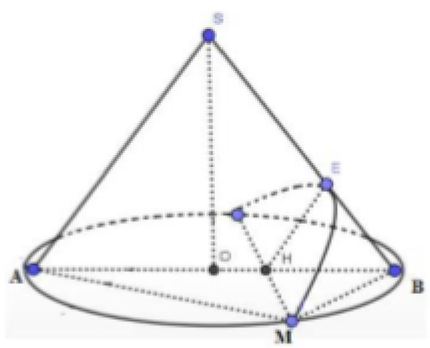
Phương pháp:

+) Xác định thiết diện thu được là Parabol

+) Tính diện tích parabol có chiều cao h và bán kính R là $S=\dfrac{4}{3}Rh$

+) Sử dụng bất đẳng thức Cô-si để tìm giá trị lớn nhất của S.

+) Cho 4 số $a;b;c;d$ không âm thì $\dfrac{a+b+c+d}{4}\ge\sqrt[4]{abcd}$. Dấu = xảy ra khi $a=b=c=d$.



Cách giải:

Khi cắt hình nón bởi mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón thì ta được thiết diện là một parabol.

Giả sử thiết diện như hình vẽ.
Khi đó ta luôn có $AB \perp MH$
Kẻ $HE//SA$ trong mặt phẳng (SAB)

Khi đó $SA//(HME)$

Đặt $BH = x(0<x<24)$, ta có $SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=\sqrt{16^2+12^2}=20cm$

Xét tam giác AMB vuông tại M có $MH^2 = AH.BH = x(24-x) \Rightarrow MH = \sqrt{x(24-x)}$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

Xét tam giác SAB có $HE//\text{SA} \Rightarrow \dfrac{BH}{AB}=\dfrac{HE}{SA} \Leftrightarrow HE=\dfrac{x.20}{24}=\dfrac{5}{6}x$

Thiết diện parabol có chiều cao $HE=\dfrac{5}{6}x$ và bán kính $r = MH = x(24-x)$

Diện tích thiết diện là $S=\dfrac{4}{3}HE.MH=\dfrac{4}{3}.\dfrac{5}{6}x\sqrt{x(24-x)}=\dfrac{10}{9}\sqrt{x.x.x(24-x)}$

$$=\frac{10}{9\sqrt{3}}\sqrt{x.x.x(72-3x)} \overset{Co-si}{\leq} \frac{10}{9\sqrt{3}}.\sqrt{\left(\frac{(x+x+x+72-3x)}{4}\right)^4} \approx 207{,}8cm^2$$

Dấu = xảy ra khi $x=72-3x \Leftrightarrow x=18(tm)$

Vậy diện tích lớn nhất của thiết diện là $S \approx 207{,}8cm^2$

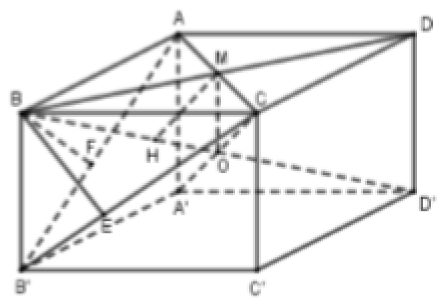
Chọn D.

Câu 45:

Phương pháp:

- Xác định các đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng AB và $B'C$, BC và AB'.
- Dựa vào giải thiết khoảng cách nhận xét tính chất của hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$.
- Xác định độ dài đoạn vuông góc chung của AC và BD'.
- Tính độ dài các cạnh của hình hộp chữ nhật và suy ra thể tích.

Cách giải:



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B lên $B'C$ và $B'A$

Dễ thấy $AB \perp (BCC'B')$ nên $AB \perp BE$

Lại có $BE \perp B'C$ NÊN $d(AB,B'C)=BE=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

Tương tự có $d(BC,AB')=BF=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

Xét các tam giác vuông BCB' và BAB' có: $\dfrac{1}{BE^2}=\dfrac{1}{BF^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{B'B^2}+\dfrac{1}{BC^2}=\dfrac{1}{B'B^2}+\dfrac{1}{BA^2} \Leftrightarrow BC=BA$ hay $ABCD$ là hình vuông

Suy ra $BD \perp AC$. Lại có $AC \perp DD'$ nên $AC \perp (BDD')$

Gọi $M = AC \cap BD, O$ là tâm hình hộp và H là hình chiếu của M lên BD'

Khi đó $AC \perp MH$ và $MH \perp BD'$ nên $d\left(AC, BD'\right) = MH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Đặt $BA = BC = x, BB' = y$ ta có:

Tam giác $BB'C$ vuông nên $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\left(\frac{2a\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{5}{4a^2} (1)$

Tam giác BMO vuông nên $\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{MO^2} = \frac{1}{MH^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{3}{a^2}$.

Mà $MB = \frac{1}{2}BD = \frac{x\sqrt{2}}{2}, MO = \frac{1}{2}DD' = \frac{y}{2}$ nên $\frac{1}{\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{3}{a^2} \Leftrightarrow \frac{2}{x^2} + \frac{4}{y^2} = \frac{3}{a^2} (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4a^2} \\ \frac{2}{x^2} + \frac{4}{y^2} = \frac{3}{a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 2a \end{cases}$

Vậy thể tích khối hộp $V = BA.BC.BB' = a.a.2a = 2a^3$

Chọn D.

Câu 46:

Phương pháp:

Nhận xét rằng: Hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$ có hai điểm cực trị trong đó chỉ có duy nhất một cực trị dương.

Từ đó xét trường hợp có hai cực trị trong đó có 1 cực trị bằng 0,1 cực trị dương và trường hợp có hai cực trị trái dấu.

Cách giải:

Đồ thị hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ nhận trục tung làm trục đối xứng nên hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$ có hai điểm cực trị trong đó chỉ có duy nhất một cực trị dương.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2(2m+1)x + 3m$

TH1: Hàm số $y = f(x)$ có 1 cực trị $x = 0$ và 1 cực trị $x > 0$. Khi đó:

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2}{3}(TM) \end{array}\right.$. Vậy nhận giá trị $m = 0$

TH2: Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị trái dấu $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 3m.3 < 0 \Leftrightarrow m < 0$

Vậy với $m \le 0$ thì thỏa mãn yêu cầu nên có vô số giá trị nguyên thỏa mãn đề bài.

Chọn A.

Câu 47:

Phương pháp:

- Xét phương trình hoành độ giao điểm, tìm nghiệm.

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và các đường thẳng $x=a,x=b$ là $S=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx$

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C\right)$ và $\left(P\right)$ là $x^3+ax^2+bx+c=mx^2+nx+p$

$\Leftrightarrow x^3+\left(a-m\right)x^2+\left(b-n\right)x+c-p=0(*)$

Dựa vào đồ thị ta thấy hai đồ thị hàm số tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $x=-1$ và cắt nhau tại điểm có hoành độ $x=1$ nên phương trình (*) có nghiệm $x=-1$ (bội 2) và $x=1$ (nghiệm đơn).

Viết lại (*) ta được $\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)=0$

Vậy $S=\int\limits_{-1}^{1}\left|\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)\right|dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)dx=\frac{4}{3}\in\left(1;2\right)$

Chọn B.

Câu 48:

Phương pháp:

Sử dụng mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm I bán kính R tiếp xúc với mặt phẳng $\left(P\right)$ thì $d\left(I,\left(P\right)\right)=R$

Từ đó sử dụng thêm dữ kiện $IA=R$ để tìm được bán kính của mặt cầu

Cách giải:

Gọi tâm mặt cầu là $I\left(a;b;c\right)$. Vì mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt phẳng $\left(P\right);\left(Q\right);\left(R\right)$ nên ta có

$d\left(I,\left(P\right)\right)=d\left(I,\left(Q\right)\right)=d\left(I,\left(R\right)\right)=R$

Hay $\left|a-1\right|=\left|b+1\right|=\left|c-1\right|=R$

Vì mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt phẳng nên ta có điều kiện $\begin{cases}a>1\\b<-1\\c>1\end{cases}$

Suy ra $a-1=-1-b=c-1\Leftrightarrow -a=b=-c\Rightarrow I\left(a;-a;a\right)$

Mà $A\in\left(S\right)$ nên $IA=R=\left|a-1\right|$

Ta có $\sqrt{\left(2-a\right)^2+\left(-2+a\right)^2+\left(5-a\right)^2}=\left|a-1\right|\Leftrightarrow\left(2-a\right)^2+\left(-2+a\right)^2+\left(5-a\right)^2=\left(a-1\right)^2$

$\Leftrightarrow 2a^2-16a+32=0\Leftrightarrow a=4\Rightarrow R=3$

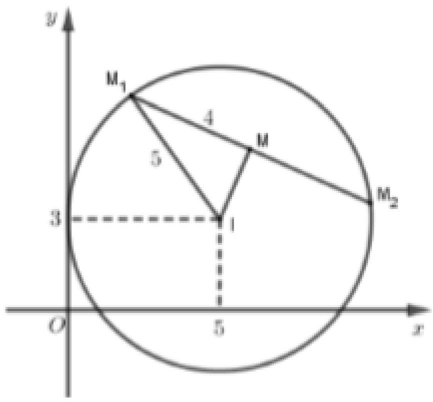
Chọn A.

Câu 49:

Phương pháp:

- Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa mãn $\left|z-5-3i\right|=5$

- Gọi M_1, M_2 là các điểm biểu diễn số phức z_1,z_2 suy ra điều kiện của M_1M_2 và tập hợp điểm biểu diễn số phức w.



Cách giải:

Tập hợp điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|z - 5 - 3i| = 5$ là đường tròn tâm $I(5;3)$ bán kính $R = 5$

Gọi $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ là hai điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 thì từ $|z_1 - z_2| = 8$ ta suy ra $M_1M_2 = 8$

Gọi $N(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ thì $\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = y_1 + y_2 \end{cases}$

Gọi M là trung điểm M_1M_2 thì $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Ta có: $IM = \sqrt{IM_1^2 - M_1M^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ hay $\sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - 5\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - 3\right)^2} = 3$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - 5\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - 3\right)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[(x_1 + x_2)^2 - 10\right]^2 + \left[(y_1 + y_2)^2 - 6\right] = 36 \Leftrightarrow (x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$

Vậy tập hợp các điểm N thỏa mãn bài toán là đường tròn $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36.$.

Chọn A.

Câu 50:

Phương pháp

+ Từ đồ thị của hàm $y = f(x)$ ta suy ra các điểm mà tại đó $f(x) = 0$ (các giao điểm với trục hoành) và các điểm là cho $f'(x) = 0$ (chính là các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$)

+ Sử dụng đạo hàm hàm hợp $(u(x))^2 = 2u(x).u'(x)$

+ Lập bảng xét dấu của hàm $y = (f(x))^2$

+ Từ đó xác định các điểm cực đại và điểm cực tiểu

- Nếu y' đổi dấu từ âm sang dương tại x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số

- Nếu y' đổi dấu từ dương sang âm tại x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số

Cách giải:

Từ đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x = 0; x = 1; x = 3$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Lại thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = x_1 \in (0;1) \\ x = x_2 \in (1;3) \end{array}\right.$

Hàm số $y = (f(x))^2$ có đạo hàm $y' = 2f(x).f'(x)$

Xét phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=3 \\ x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$

Ta có BXD của y' như sau

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	|	-	0	-	|	-	0	+	
$f'(x)$		-	|	-	0	+	0	-	0	+	|	+	
$y'=2f(x).f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Nhận thấy hàm số $y=(f(x))^2$ có y' đổi dấu từ âm sang dương tại ba điểm $x=0; x=1; x=3$ nên hàm số có ba điểm cực tiểu. Và y' đổi dấu từ dương sang âm tại hai điểm $x=x_1; x=x_2$ nên hàm số có hai điểm cực đại.

Chọn D.