

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1 (8,0 điểm)

a) Giải phương trình: $(2x - 4)\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x + 3} = 5x - 7 + \sqrt{3x^2 + 7x - 6}$.

b) Cho các số thực dương x, y . Chứng minh rằng:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3y}} + \frac{1}{\sqrt{y+3x}} \right) \leq 2.$$

Câu 2 (4,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức: $u_n = \left\{ \frac{2^{2n+1} + n^2 + n + 2}{2^{n+1} + 2} \right\}$, $n \in \mathbb{N}$ (trong đó

$[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x và $\{x\} = x - [x]$).

a) Tính sáu số hạng đầu của dãy số (u_n) .

b) Tính giới hạn của dãy số (u_n) .

c) Có bao nhiêu số hạng của dãy số (u_n) với $n \leq 86$ thỏa mãn: $\frac{2526 \cdot 2^{n-99}}{2^n + 1} \leq u_n \leq \frac{23}{65}$?

Câu 3 (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC có tâm S , cắt đường thẳng AB tại điểm X khác B và cắt đường tròn Euler của tam giác ABC tại hai điểm D, E . Gọi K, L theo thứ tự là các điểm đối xứng của S qua AB, AC . Chứng minh rằng:

a) $XO \perp AC$.

b) Đường thẳng KL đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC và hai đường thẳng AD, AE đối xứng nhau qua đường phân giác trong của \widehat{BAC} .

Câu 4 (4,0 điểm)

a) Cho số nguyên tố p , số nguyên dương a thỏa mãn $1 < a < p+1$ và q là ước nguyên tố của $A = 1 + a + \dots + a^{p-1}$. Chứng minh rằng $q-1$ chia hết cho p .

b) Cho số nguyên dương n . Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 3, có n chữ số và các chữ số đều thuộc tập $A = \{3; 4; 5; 6; 9\}$?

----- Hết -----