

Bài 1. (5 điểm)

Cho dãy (x_n) , $n = 0, 1, \dots$ xác định bởi $x_0 = 1$ và với mỗi $n \geq 0$, đặt $x_{n+1} = 3x_n + [x_n \sqrt{5}]$ (ở đây $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a). Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{x_i}{2^{3i}}$.

Bài 2. (5 điểm)

Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ mà $a^2 - b^2 \in \mathbb{Q}$ thì $P(a) - P(b) \in \mathbb{Q}$.

Bài 3. (5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) . Giả sử OA cắt các đường cao từ B và C của tam giác ABC lần lượt tại P, Q . Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác PQH thuộc một trung tuyến của tam giác ABC .

Bài 4. (5 điểm)

Bảng ô vuông gồm m hàng và n cột, với mỗi ô vuông con được đặt một trong hai số: 0 hoặc 1. Một bảng được gọi là “tốt” nếu tổng các số của mỗi dòng, của mỗi cột, là số chẵn. Hỏi:

a) Có bao nhiêu bảng số như trên?

b) Có bao nhiêu bảng “tốt”?

----- HẾT -----

Bài 5. (6 điểm)

Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn: $2f(x) = f\left(\frac{x}{1+x+x^2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right)$ với mọi $x \in [0; +\infty)$.

Bài 6. (7 điểm)

Xét p là số nguyên tố thỏa mãn $5^{(p-1)^2} - 1$ không chia hết cho p^2 . Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $p^x + 5 = y^p$.

Bài 7. (7 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn ω và l là đường thẳng không có điểm chung với ω . Ký hiệu P là hình chiếu vuông góc của tâm đường tròn ω lên l . Các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt cắt đường thẳng l tại các điểm X, Y, Z khác P . Chứng minh rằng tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác AXP, BYP và CZP thẳng hàng.

----- HẾT -----