SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12
CHƯƠNG TRÌNH THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2019-2020
ĐỀ THI MÔN: TOÁN

Thời gian: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1.

a) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 2}{x_n + 3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

b) Tìm tất cả các hàm số xác định, liên tục trong khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn:

$$f(x) = f\left(\frac{x+2}{x+3}\right) + \frac{x^2 + 2x - 2}{x+3} \text{ với mọi } x > 0.$$

Câu 2.

a) Cho số tự nhiên $a \geq 2$ thỏa mãn $a+1$ có ước nguyên tố lẻ p. Chứng minh rằng $\left(a^{p^2} + 1\right) \vdots p^2$.

b) Chứng minh rằng tồn tại vô số những số tự nhiên n sao cho $\left(2019^n + 1\right) \vdots n$.

Câu 3. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn (A) có tâm A bán kính AE cắt đoạn thẳng AH tại điểm K. Đường thẳng IK cắt đường thẳng BC tại P. Các đường thẳng DK và PK cắt đường tròn (A) lần lượt tại Q và T khác K.

a) Chứng minh rằng tứ giác $TDPQ$ nội tiếp và ba điểm Q, A, P thẳng hàng.

b) Đường thẳng DK cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là X. Chứng minh rằng ba đường thẳng AX, EF, TI đồng quy.

c) Chứng minh rằng đường tròn đường kính AP tiếp xúc với đường tròn (I).

Câu 4. Cho $P(x)$ là một đa thức khác hằng số với hệ số thực sao cho tất cả các nghiệm của nó đều là số thực. Giả sử tồn tại một đa thức $Q(x)$ với hệ số thực sao cho $(P(x))^2 = P(Q(x))$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm của đa thức $P(x)$ đều bằng nhau.

Câu 5. Một tập hợp gồm 3 số nguyên dương được gọi là tập Pytago nếu 3 số này là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông. Chứng minh rằng với hai tập Pytago P, Q bất kỳ, ta luôn tìm được m tập Pytago $P_1, P_2, \ldots, P_m$ $(m \geq 2)$ sao cho $P_1 = P$, $P_m = Q$ và $P_i \cap P_{i+1} \neq \varnothing$ với mọi $1 \leq i \leq m-1$.

------------ **HẾT** ------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: ………………..……................…… Số báo danh: ……………………………

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12
(Đáp án có 05 trang)	CHƯƠNG TRÌNH THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2019-2020
	HƯỚNG DẪN MÔN: TOÁN

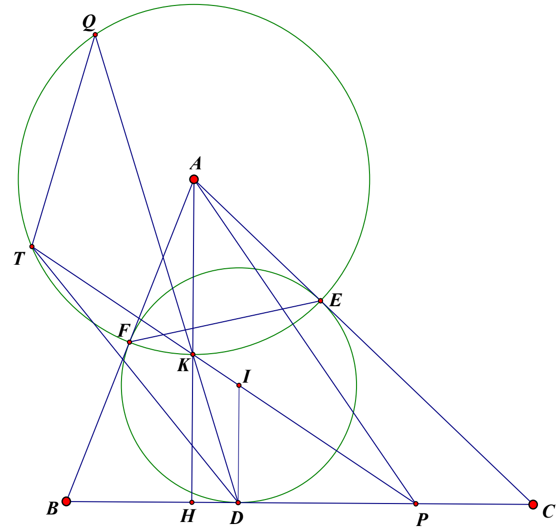
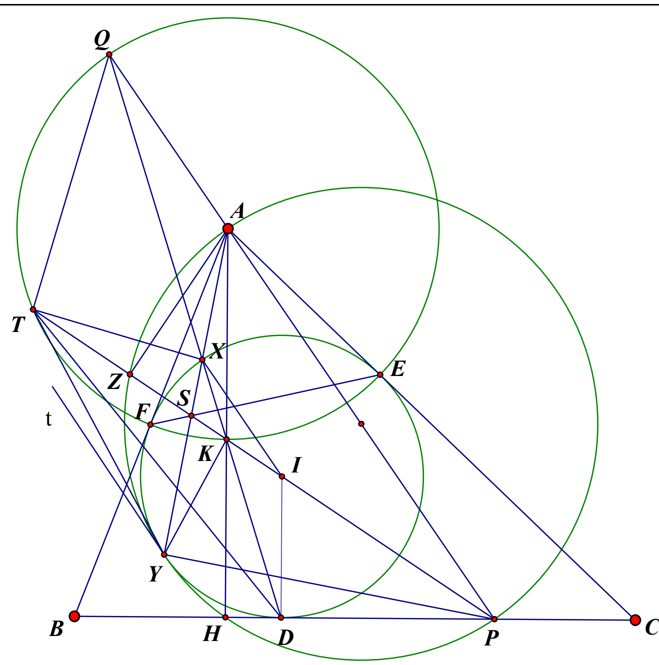
I. LƯU Ý CHUNG:

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Ý	Nội dung trình bày	Điểm
1		***a) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 2}{x_n + 3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.*** ***Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*** ***b) Tìm tất cả các hàm số xác định và liên tục trong khoảng $(0;+\infty)$ sao cho*** $$f(x) = f\left(\frac{x+2}{x+3}\right) + \frac{x^2 + 2x - 2}{x+3},\ \ \forall x > 0$$	**3,0**
	a	Xét số $b>0$ là nghiệm của phương trình $b = \dfrac{b+2}{b+3} \Rightarrow b = \sqrt{3} - 1$. Dễ thấy $x_n > 0,\ \forall n \ge 1$ nên ta có: $$0 \le \left|x_{n+1} - b\right| = \left|\frac{x_n + 2}{x_n + 3} - \frac{b+2}{b+3}\right| = \left|\frac{x_n - b}{(x_n + 3)(b+3)}\right| \le \frac{1}{9}\left|x_n - b\right|$$	**1,0**
		Suy ra $0 \le \left|x_{n+1} - b\right| \le \dfrac{1}{9}\left|x_n - b\right| \le \left(\dfrac{1}{9}\right)^2 \left|x_{n-1} - b\right| \le \left(\dfrac{1}{9}\right)^n \left|x_1 - b\right|$ Do $\lim \left(\dfrac{1}{9}\right)^n \left|x_1 - b\right| = 0$ nên theo nguyên lý kẹp suy ra $\lim x_n = b = \sqrt{3} - 1$	**1,0**
	b	Ta có $f(x) = f\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right) + \dfrac{x^2+2x-2}{x+3} \Rightarrow f(x) = f\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right) - \dfrac{x+2}{x+3} + x$ Suy ra $f(x) - x = f\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right) - \dfrac{x+2}{x+3},\ \forall x > 0$ Đặt $g(x) = f(x) - x \Rightarrow g(x) = g\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right),\ \forall x > 0$ (1)	**0,5**
		Chọn $a > 0$ tùy ý, xét dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = a;\ x_{n+1} = \dfrac{x_n+2}{x_n+3},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hoàn toàn tương tự phần a) thì $\lim x_n = b = \sqrt{3} - 1$ Từ (1) suy ra $g(a) = g(x_1) = g(x_2) = ... = g(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$	**0,25**
		Do hàm $g(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ nên $$g(a) = \lim g(x_n) = g(\lim x_n) = g\left(\sqrt{3} - 1\right) = c$$ Suy ra $g(x) = c$ hay $f(x) = x + c$ với mọi $x > 0$.	**0,25**

		Thử lại ta thấy hàm số cần tìm là $f(x)=x+c$ với mọi $x>0$, c là hằng số tùy ý.	
2		***a) Cho số tự nhiên $a\geq 2$ sao cho $a+1$ có ước nguyên tố lẻ là p. Chứng minh rằng $a^{p^2}+1\vdots p^2$.*** ***b) Chứng minh rằng tồn tại vô số những số tự nhiên n sao cho $2019^n+1\vdots n$.***	**2,0**
	a	Ta có $a^{p^2}+1=\left(a^p\right)^p+1=(m+1)\left(m^{p-1}-m^{p-2}+...-m+1\right)=(m+1)A$, với $m=a^p$.	**0,5**
		Do p lẻ nên $a^p+1\vdots a+1\vdots p\Rightarrow m+1\vdots p\Rightarrow m\equiv -1 \pmod p$. Do đó $A=m^{p-1}-m^{p-2}+...-m+1\equiv p\equiv 0 \pmod p$	**0,5**
		Suy ra $(m+1)A\vdots p^2$, tức là $a^{p^2}+1\vdots p^2$.	**0,5**
	b	Trước hết ta chứng minh mệnh đề sau bằng quy nạp theo *k*: Cho số tự nhiên $a\geq 2$ sao cho $a+1$ có ước nguyên tố lẻ là p. Khi đó $a^{p^k}+1\vdots p^k$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$ (1) Theo giả thiết thì ta thấy ngay (1) đúng với $k=1$. Giả sử (1) đúng với *k*, ta chứng minh (1) đúng với $k+1$. Ta có $a^{p^{k+1}}+1=\left(a^{p^k}\right)^p+1=(m+1)\left(m^{p-1}-m^{p-2}+...-m+1\right)=(m+1)A$, trong đó $m=a^{p^k}$. Theo giả thiết quy nạp $m+1\vdots p^k$. Lại có $m+1\vdots p\Rightarrow m\equiv -1 \pmod p$. Do đó $A=m^{p-1}-m^{p-2}+...-m+1\equiv p\equiv 0 \pmod p$ Suy ra $(m+1)A\vdots p^{k+1}$, tức là $a^{p^{k+1}}+1\vdots p^{k+1}$. Vậy (1) đúng với $k+1$.	**0,25**
		Trở lại bài toán: Với $a=2019$ thì $a+1=2020$ có ước nguyên tố lẻ là 5 nên theo (1) các số $n=5^k$ sẽ thỏa mãn $2019^n+1\vdots n$. ***Chú ý: Nếu học sinh chứng minh trực tiếp $2019^{5^k}+1\vdots 5^k$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$ thì vẫn cho tối đã điểm.***	**0,25**
3		***Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn (A) có tâm A bán kính AE cắt đoạn thẳng AH tại điểm K. Đường thẳng IK cắt đường thẳng BC tại P. Các đường thẳng DK và PK cắt đường tròn (A) lần lượt tại Q và T khác K.*** ***a) Chứng minh rằng tứ giác TDPQ nội tiếp và ba điểm Q, A, P thẳng hàng.*** ***b) Đường thẳng DK cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là X. Chứng minh rằng ba đường thẳng AX, EF, TI đồng quy.*** ***c) Chứng minh rằng đường tròn đường kính AP tiếp xúc với đường tròn (I).***	**3,0**

			
	a)	Ta có $\widehat{TQD}=\widehat{TQK}=\frac{1}{2}\widehat{TAK}=90^0-\widehat{AKT}=\widehat{HPK}=\widehat{TPD}$. Suy ra tứ giác $TDPQ$ nội tiếp.	**1,0**
		Ta có $\widehat{KQA}=\widehat{AKQ}=\widehat{DKH}=\widehat{KDI}$ (1) Dễ thấy IF là tiếp tuyến của (A) nên $ID^2=IF^2=\overline{IK}.\overline{IT}\Rightarrow \Delta IDK\sim\Delta ITD$ Suy ra $\widehat{KDI}=\widehat{ITD}=\widehat{KQP}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KQA}=\widehat{KQP}$. Do đó ba điểm Q, A, P thẳng hàng.	**0,5**
			
	b	Gọi Y là giao điểm thứ hai của AX với (I). Ta có $IX^2=IF^2=\overline{IK}.\overline{IT}\Rightarrow\widehat{ITX}=\widehat{IXK}=\widehat{IDX}=\widehat{AKX}$ (vì $AK \parallel ID$) Lại có $AK^2=AF^2=\overline{AX}.\overline{AY}\Rightarrow\widehat{AKX}=\widehat{AYK}$. Suy ra $\widehat{ITX}=\widehat{AYK}$. Do đó tứ giác $XKYT$ nội tiếp.	**0,25**
		Xét ba đường tròn: $(XKYT);(I);(A)$, lần lượt có trục đẳng phương là KT, XY, EF. Do đó ba đường thẳng KT, XY, EF đồng quy tại tâm đẳng phương của ba đường	**0,25**

		tròn trên. Vậy ba đường thẳng AX, EF, TI đồng quy.	
	c	Gọi Z là giao điểm thứ hai của đường thẳng PT với đường tròn đường kính AP. Khi đó $AZ \perp KT$ và Z là trung điểm KT. Do IE và IF là tiếp tuyến của (A) nên $(TKSI) = -1$, theo hệ thức Macloranh ta được $\overline{SZ}.\overline{SI} = \overline{SK}.\overline{ST} = \overline{SX}.\overline{SY}$.	**0,25**
		Suy ra tứ giác $XZYI$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ZYX} = \widehat{ZIX}$	**0,25**
		Mặt khác $\widehat{IXD} = \widehat{ITD} = \widehat{DQP} \Rightarrow IX \parallel PQ \Rightarrow \widehat{ZIX} = \widehat{ZPA}$. Vậy $\widehat{ZYX} = \widehat{ZPA}$ Suy ra tứ giác $AZYP$ nội tiếp, suy ra Y thuộc đường tròn đường kính AP.	**0,25**
		Vẽ tiếp tuyến Yt của (I), ta có $$\widehat{tYX} = \frac{1}{2}\widehat{XIY} = 90^0 - \widehat{IXY} = 90^0 - \widehat{IZY} = 90^0 - \widehat{YAP} = \widehat{YPA}.$$ Do đó Yt là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AP. Vậy đường tròn đường kính AP tiếp xúc với đường tròn (I) tại điểm Y (đpcm).	**0,25**
4		***Cho $P(x)$ là một đa thức khác hằng số với hệ số thực sao cho tất cả các nghiệm của nó đều là số thực. Giả sử tồn tại một đa thức $Q(x)$ hệ số thực sao cho $(P(x))^2 = P(Q(x))$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm của $P(x)$ đều bằng nhau.***	**1,0**
		Giả sử $P(x) = A(x-x_1)^{d_1}.(x-x_2)^{d_2}...(x-x_k)^{d_k}$, trong đó $x_1 < x_2 < ... < x_k$ là tất cả các nghiệm thực của $P(x)$. Dễ thấy $\deg Q(x) = 2 \Rightarrow Q(x) = ax^2 + bx + c$.	**0,25**
		Khi đó ta được $$A^2(x-x_1)^{2d_1}.(x-x_2)^{2d_2}...(x-x_k)^{2d_k} = A\prod_{i=1}^{k}(ax^2+bx+c-x_i)^{d_i}$$ Do đó với mỗi chỉ số i thì nghiệm của đa thức $ax^2+bx+c-x_i$ là x_s, x_t, với s,t nào đó. Theo định lý Viet ta được $x_s + x_t = -\frac{b}{a}$. Như vậy tất cả các nghiệm của $P^2(x)$ được chia thành các cặp (x_s, x_t) mà tổng của hai số trong mỗi cặp bằng nhau và bằng $-\frac{b}{a}$.	**0,25**
		Giả sử x_1 ghép cặp với x_s và x_k ghép cặp với x_t. Từ $x_1 \le x_t; x_s \le x_k$ và $x_1 + x_s = x_k + x_t$ ta suy ra $x_1 = x_t; x_s = x_k$. Vậy x_1 chỉ có thể ghép cặp với x_k. Lập luận hoàn toàn tương tự suy ra mỗi cặp chỉ có dạng (x_j, x_{k+1-j}). Áp dụng định lý Viet ta có $x_j.x_{k+1-j} = \frac{c-x_m}{a}$, với m nào đó.	**0,25**
		Do có đúng k giá trị $\frac{c-x_m}{a}$ và các số dạng $x_j.x_{k+1-j}$ chỉ chứa nhiều nhất $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ giá trị phân biệt nên $k \le \left[\frac{k+1}{2}\right]$. Từ bất đẳng thức này ta suy ra ngay k=1. Khi đó $P(x) = A(x-x_1)^{d_1}$, và suy ra tất cả các nghiệm của $P(x)$ đều bằng nhau (đpcm).	**0,25**
5		***Một tập hợp gồm 3 số nguyên dương được gọi là tập Pytago nếu 3 số này là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông. Chứng minh rằng với hai tập Pytago P, Q***	**1,0**

		bất kỳ, ta luôn tìm được m ***tập Pytago*** $P_1, P_2, ..., P_m$ $(m \geq 2)$ ***sao cho*** $P_1 = P$, $P_m = Q$ ***và*** $P_i \cap P_{i+1} \neq \varnothing$ ***với mọi*** $1 \leq i \leq m-1$.	
		Bổ đề: Với mỗi số nguyên dương $n \geq 3$, luôn tồn tại một tập Pytago chứa số n. Ta chứng minh mệnh đề trên bằng quy nạp theo n. Dễ thấy mệnh đề đúng với $n = 3,4,5$ vì $\{3,4,5\}$ là một tập Pytago. Xét $n \geq 6$, giả sử mệnh đề đúng với mọi số nhỏ hơn n, ta cần chứng minh mệnh đề đúng với n. + Nếu n chẵn, $n = 2k$ thì $3 \leq k < n$. Theo giả thiết quy nạp, tồn tại 1 tập Pytago A chứa số k. Giả sử $A = \{k, a, b\}$. Khi đó tập $B = \{n, 2a, 2b\}$ là tập Pytago chứa số n. + Nếu n lẻ, ta thấy tập $A = \left\{n; \frac{1}{2}(n^2-1); \frac{1}{2}(n^2+1)\right\}$ là tập Pytago chứa số n. Vậy luôn tồn tại một tập Pytago chứa số n.	**0,25**
		Nếu hai tập Pytago P, Q thỏa mãn yêu cầu của bài toán thì ta nói cặp (P, Q) là một cặp "đẹp" và kí hiệu là $P \sim Q$. Như vậy ta cần chứng minh mọi cặp Pytago (P, Q) đều là cặp đẹp (1) ***Nhận xét***: Ta chỉ cần chứng minh mệnh đề (1) đúng trong trường hợp $P = \{3,4,5\}$. *Chứng minh*: Xét $P = \{3,4,5\}$ và giả sử cứ với tập Q là tập Pytago bất kì thì (P, Q) là cặp đẹp. Xét hai tập Pytago bất kì là Q, R, khi đó (P, Q) và (P, R) là cặp đẹp nên tồn tại dãy $Q_1, Q_2, ..., Q_m$ và $R_1, R_2, ..., R_t$ sao cho $Q_1 = P_1 = \{3;4;5\}$; $Q_m = Q; R_t = R$ và $Q_i \cap Q_{i+1} \neq \varnothing$; $R_i \cap R_{i+1} \neq \varnothing$ Khi đó dãy $Q_m, Q_{m-1}, ..., Q_1, R_2, R_3, ..., R_t$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Suy ra (Q, R) là cặp đẹp. Qua phép chứng minh trên ta cũng suy ra rằng nếu (P, Q) và (P, R) là hai cặp đẹp thì (Q, R) cũng là cặp đẹp.	**0,25**
		Trở lại bài toán, xét $P = \{3,4,5\}$, ta tiếp tục chứng minh bài toán bằng quy nạp theo phần tử nhỏ nhất của Q. Giả sử $\min Q = n$ + Nếu $3 \leq n \leq 5$ thì hiển nhiên (P, Q) là cặp đẹp. + Xét $n \geq 6$, giả sử mệnh đề đúng với mọi số $3 \leq \min Q < n$. * Nếu n chẵn, $n = 2k$ thì $3 \leq k < n$. Theo bổ đề và giả thiết quy nạp thì tồn tại một tập Pytago Q' chứa k và (P, Q') là cặp đẹp. Dễ thấy rằng khi nhân tất cả các phần tử của một cặp đẹp với số 2 thì lại cho ta một cặp đẹp mới. Do đó nếu gọi $Q' = \{k; x; y\}$ thì các cặp sau là đẹp: $(\{n; 2x; 2y\}; \{6;8;10\})$; $(\{n; 2x; 2y\}; Q)$ (vì có giao khác rỗng) Mặt khác $(\{6;8;10\}; \{3;4;5\})$ cũng là cặp đẹp do chuỗi xây dựng các tập đẹp Pytago sau: $\{6;8;10\} \sim \{8;15;17\} \sim \{9;12;15\} \sim \{5;12;13\} \sim \{3;4;5\}$ Vậy Q và $\{3;4;5\}$ tạo thành cặp đẹp.	**0,25**
		* Nếu n lẻ thì $Q \sim \left\{n; \frac{1}{2}(n-1)(n+1); \frac{1}{2}(n^2+1)\right\}$. Theo bổ đề thì tồn tại tập Pytago R chứa $\frac{1}{2}(n+1)$ và tập Pytago H chứa $n-1$.	**0,25**

		Từ $3 \le \frac{1}{2}(n+1) < n$ và $3 \le n-1 < n$ nên theo giả thiết quy nạp ta có $R \sim \{3;4;5\}; H \sim \{3;4;5\}$. Do đó $\left\{n;\frac{1}{2}(n-1)(n+1);\frac{1}{2}(n^2+1)\right\} \sim (n-1)R \sim (n-1)P \sim 3H \sim 3\{3;4;5\} = \{9;12;15\} \sim \{3;4;5\}$ Vậy Q và $\{3;4;5\}$ tạo thành cặp đẹp và bài toán được chứng minh hoàn toàn.	

----------- **HẾT** ----------