SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẬU GIANG

ĐỀ CHÍNH THỨC
(*Đề thi gồm 01 trang*)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH CẤP THPT
NĂM HỌC 2018 – 2019
KHÓA NGÀY 19/4/2019
MÔN TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút (*không kể thời gian phát đề*)

Câu I: (5,0 điểm)

1) Giải phương trình $(x-1)\sqrt{x+1}-x\sqrt{5-x}=3x^2-4x-1$ trên tập số thực.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x^2+2y^2=x+4y \end{cases}$ (với $x,y\in\mathbb{R}$).

Câu II: (3,0 điểm)

1) Cho hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- $f(2)=2;$
- $f(mn)=f(m)f(n);\ \forall m,n\in\mathbb{N};$
- $f(m)>f(n),\forall m>n.$

Tính $f(1)$ và $f(6)$. Tìm $f(n)$ theo n.

2) Tìm các số nguyên a và b thỏa mãn phương trình $a^3+b^3=(a+b)^2$.

Câu III: (4,0 điểm)

1) Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn điều kiện $x+y\le 1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{xy}+4xy$.

2) Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $u_1=4;u_2=5$ và $u_{n+2}=u_n^2-(n+1)u_{n+1}$, với $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 1$.
Tính u_3 và u_4. Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số trên.

Câu IV: (6,0 điểm)

1) Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương *n* thỏa mãn 2 tính chất sau:

- Các chữ số của *n* là khác nhau.
- Các chữ số của *n* thuộc tập hợp {0; 1; 3; 5; 7}.

a) Tính số phần tử của S.
b) Chọn ngẫu nhiên một số *m* thuộc S. Tính xác suất để *m* có 4 chữ số và *m* chia hết cho 6.

2) Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi I là điểm trên cạnh BD sao cho $DAI=BAC$.

a) Chứng minh rằng $\Delta ADI\sim\Delta ACB$ và $\Delta ABI\sim\Delta ACD$.

b) Chứng minh rằng $AB.CD+AD.BC=AC.BD$.

Câu V: (2,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SC=a\sqrt{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và (α) vuông góc với SC. Tính theo *a* diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α).

..........................HẾT..........................

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay
Giám thị coi thi không giải thích gì thêm

SỞ GD& ĐT HẬU GIANG　　KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH CẤP THPT
NĂM HỌC 2018 - 2019

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC
Môn: TOÁN THPT
(Hướng dẫn chấm gồm 05 trang)

I. Hướng dẫn chung

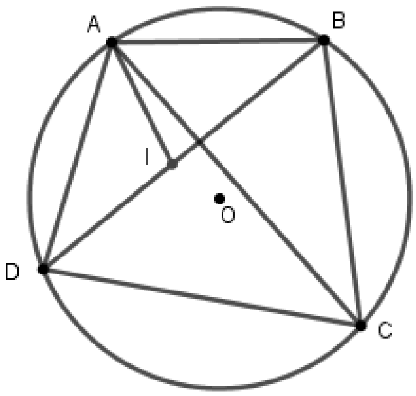
1. Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
2. Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong tổ chấm thi.
3. Điểm bài thi là điểm sau khi cộng điểm toàn bài thi và không làm tròn.

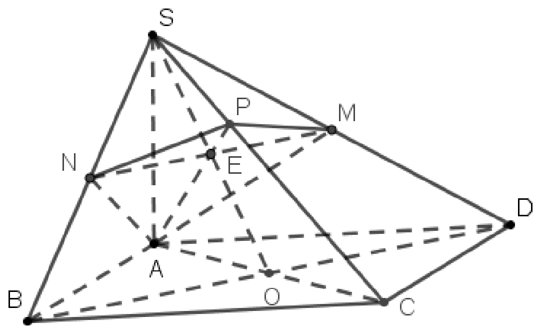
II. Đáp án và thang điểm

Câu	Nội dung	Điểm
Câu I.1 (2,0 điểm)	**1) Giải phương trình** $(x-1)\sqrt{x+1}-x\sqrt{5-x}=3x^2-4x-1$ **trên tập số thực.**	**2,0**
	Điều kiện: $-1\le x\le 5$.	0,25
	Ta có $(x-1)\sqrt{x+1}-x\sqrt{5-x}=3x^2-4x-1$ $\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x+1}-(x-1)+2x-x\sqrt{5-x}=3x^2-3x$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{x+1}-1)+x(2-\sqrt{5-x})-3x^2+3x=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x+1}+1}+\dfrac{x(x-1)}{2+\sqrt{5-x}}-3x(x-1)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x(x-1)=0 \\ g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\dfrac{1}{2+\sqrt{5-x}}-3=0 \end{array}\right.$	0,25
	Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$ (nhận).	0,25
	Do $\sqrt{x+1}+1\ge 1$ và $2+\sqrt{5-x}\ge 2$ nên $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\dfrac{1}{2+\sqrt{5-x}}<2$.	0,25
	Do đó $g(x)<0,\ \forall x\in[-1;5]$. Do đó, phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm.	0,25
Câu I.2 (3,0 điểm)	**2) Giải hệ phương trình** $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x^2+2y^2=x+4y \end{cases}$ **(với** $x,y\in\mathbb{R}$**).**	**3,0**
	Ta có $\begin{cases} x^3+y^3=9 & (1) \\ x^2+2y^2=x+4y & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3-9=0 \\ 3x^2+6y^2-3x-12y=0 \end{cases}$.	0,25
	Lấy phương trình thứ nhất trừ cho phương trình thứ hai theo vế, ta được: $x^3-3x^2+3x-1+y^3-6y^2+12y-8=0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-1)^3+(y-2)^3=0$	0,5
	$\Leftrightarrow x-1=2-y$	0,25
	$\Leftrightarrow y=3-x$	0,25
	Thay $y=3-x$ vào (2), ta có $x^2-3x+2=0$	0,5
	$\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=2$ (nhận).	0,5
	Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.	0,5

Câu II.1 (2,0 điểm)	**1) Cho hàm số $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:** • $f(2)=2;$ • $f(mn)=f(m)f(n);\ \forall m,n\in\mathbb{N};$ • $f(m)>f(n), \forall m>n.$ **Tính** $f(1)$ **và** $f(6)$. **Tìm** $f(n)$ **theo** n.	**2,0**
	Ta có $f(2)=f(2.1)=f(2).f(1)=2.f(1)=2$ nên $f(1)=1.$	0,25
	Ta có $f(4)=f(2.2)=f(2).f(2)=4.$	0,25
	Mà $2=f(2)<f(3)<f(4)=4$ nên ta suy ra $f(3)=3.$	0,25
	Suy ra $f(6)=f(2.3)=f(2).f(3)=2.3=6.$	0,25
	Dự đoán $f(n)=n;\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$	0,25
	Ta chứng minh $f(n)=n;\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$ Ta có $f(1)=1; f(2)=2.$ Giả sử với $n=k\geq 2,$ ta có $f(k)=k.$ Ta cần chứng minh $f(k+1)=k+1.$ Nếu k là số lẻ thì $k+1$ là số chẵn nên ta có $f(k+1)=f\left(2.\dfrac{k+1}{2}\right)=f(2).f\left(\dfrac{k+1}{2}\right)=2.\dfrac{k+1}{2}=k+1.$	0,25
	Nếu k là số chẵn thì $k+2$ là số chẵn nên ta có $f(k+2)=f\left(2.\dfrac{k+2}{2}\right)=f(2).f\left(\dfrac{k+2}{2}\right)=2.\dfrac{k+2}{2}=k+2.$	0,25
	Do $k=f(k)<f(k+1)<f(k+2)=k+2$ nên $f(k+1)=k+1.$ Vậy $f(n)=n;\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$	0,25
Câu II.2 (1,0 điểm)	**2) Tìm các số nguyên a và b thỏa mãn phương trình $a^3+b^3=(a+b)^2$.**	**1,0**
	Ta có $a^3+b^3=(a+b)^2 \Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)^2=0$ $\Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2-a-b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ a^2-(b+1)a+b^2-b=0 \end{array}\right.$	0,25
	Từ phương trình thứ nhất, suy ra $a=-b;$ với $b\in\mathbb{Z}.$	0,25
	Xét phương trình $a^2-(b+1)a+b^2-b=0$ (*) Ta có $\Delta_a=-3b^2+6b+1.$ Phương trình (*) có nghiệm khi $\Delta_a=-3b^2+6b+1\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}\leq b\leq \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow b\in\{0;1;2\}.$	0,25
	* Với $b=0$, ta có $a^2-a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right.$ (nhận) * Với $b=1$, ta có $a^2-2a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right.$ (nhận) * Với $b=2$, ta có $a^2-3a+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=2 \end{array}\right.$ (nhận) Vậy, các số nguyên a và b cần tìm là	0,25

	$\begin{cases}a=-b\\ b\in\mathbb{Z}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=2\\ b=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}$.	
Câu III.1 (2,0 điểm)	**1) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x+y\le 1$.** **Chứng minh rằng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$.** **Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}+4xy$.**	**2,0**
	Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{2}{\sqrt{xy}}$ và $x+y\ge 2\sqrt{xy}$.	0,5
	Khi đó $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)\ge 4\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$.	0,5
	Ta có $P=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{4xy}+\frac{1}{4xy}+4xy$ $\ge\frac{4}{x^2+y^2+2xy}+\frac{1}{4\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}+2$	0,25
	$\ge\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}+2\ge 7$.	0,25
	Ta có $P=7\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.	0,25
	Vậy $P_{\min}=7$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức.	0,25
Câu III.2 (2,0 điểm)	**2) Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $u_1=4; u_2=5$ và $u_{n+2}=u_n^2-(n+1)u_{n+1}$, với $n\in\mathbb{N}, n\ge 1$. Tính u_3 và u_4. Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số trên.**	**2,0**
	Ta có $u_3=u_1^2-2u_2=4^2-2.5=6$ và $u_4=u_2^2-3u_3=5^2-3.6=7$.	1,0
	Từ $u_1=4; u_2=5; u_3=6$ và $u_4=7$, ta dự đoán $u_n=n+3;\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.	0,25
	Ta chứng minh bằng quy nạp $u_n=n+3;\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Thật vậy, ta có $u_1=4=1+3; u_2=5=2+3; u_3=6=3+3$ (đúng).	0,25
	Giả sử với $n=k\ge 3$. Ta có $u_k=k+3$. Khi đó $u_{k-1}=k+2$. Ta có $u_{k+1}=u_{k-1}^2-k.u_k=(k+2)^2-k(k+3)=k+4=(k+1)+3$. Vậy, mệnh đề đúng với $n=k+1$.	0,25
	Do đó, ta có $u_n=n+3;\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.	0,25
Câu IV.1 (3,0 điểm)	**1) Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn 2 tính chất sau:** • **Các chữ số của n là khác nhau.** • **Các chữ số của n thuộc tập hợp $\{0;1;3;5;7\}$.** **a) Tính số phần tử của S.** **b) Chọn ngẫu nhiên một số m thuộc S. Tính xác suất để m có 4 chữ số và m chia hết cho 6.**	**3,0**
	a) Tính số phần tử của S.	**1,5**
	Trường hợp 1: n có 1 chữ số. Có 4 số thỏa mãn.	0,25
	Trường hợp 2: n có 2 chữ số. Có 4.4 = 16 số thỏa mãn.	0,25
	Trường hợp 3: n có 3 chữ số. Có 4.4.3 = 48 số thỏa mãn.	0,25
	Trường hợp 4: n có 4 chữ số. Có 4.4.3.2 = 96 số thỏa mãn.	0,25

	Trường hợp 5: n có 5 chữ số. Có 4.4.3.2.1 = 96 số thỏa mãn.	0,25
	Số phần tử của S là $4 + 16 + 48 + 96 + 96 = 260$.	0,25
	b) Chọn ngẫu nhiên một số m thuộc S. Tính xác suất để m có 4 chữ số và m chia hết cho 6.	**1,5**
	Gọi B là biến cố cần tính xác suất. Giả sử $m = \overline{abcd}$ là số thuộc tập hợp B. Vì $m = \overline{abcd} \vdots 6$ nên $\begin{cases} m \vdots 3 \\ m \vdots 2 \end{cases}$.	0,25
	Do đó, suy ra $d = 0$. Chọn d có 1 cách chọn.	0,25
	Ta xét các trường hợp sau:	
	Trường hợp 1: $a, b, c \in \{1; 3; 5\}$. Ta có $3! = 6$ cách chọn.	0,25
	Trường hợp 2: $a, b, c \in \{3; 5; 7\}$. Ta có $3! = 6$ cách chọn.	0,25
	Vậy số phần tử của B là $1.(6+6) = 12$.	0,25
	Xác suất cần tính là $P(B) = \frac{12}{260} = \frac{3}{65}$.	0,25
Câu IV.2 (3,0 điểm)	**2) Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi I là điểm trên cạnh BD sao cho $DAI = BAC$.** **a) Chứng minh rằng $\Delta ADI \sim \Delta ACB$ và $\Delta ABI \sim \Delta ACD$.** **b) Chứng minh rằng $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.**	**3,0**
	Hình vẽ chính xác, thể hiện được giả thiết. 	0,25
	a) Chứng minh $\Delta ADI \sim \Delta ACB$ và $\Delta ABI \sim \Delta ACD$.	**2,0**
	Ta có $ADI = ACB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB)	0,5
	Ta lại có $DAI = BAC$ (giả thiết)	0,25
	Suy ra $\Delta ADI \sim \Delta ACB$ (góc – góc).	0,25
	Do $DAI = BAC$ nên $BAI = DAC$.	0,25
	Mặt khác $ABI = ABD = ACD$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AD)	0,5
	Suy ra $\Delta ABI \sim \Delta ACD$ (góc – góc).	0,25
	b) Chứng minh $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.	**0,75**
	Do $\Delta ADI \sim \Delta ACB$ nên $\frac{AD}{AC} = \frac{ID}{BC}$ (1)	0,25
	Do $\Delta ABI \sim \Delta ACD$ nên $\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{CD}$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2), suy ra $AD.BC + AB.CD = AC.(ID + IB) = AC.BD$.	0,25

Câu V (2,0 điểm)	**Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SC = a\sqrt{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và (α) vuông góc với SC. Tính theo *a* diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α).**	**2,0**
	Hình vẽ chính xác, thể hiện được giả thiết.  	0,25
	Ta có $AC = a\sqrt{2}$ và $SC = a\sqrt{3}$ nên $SA = a.$ Gọi $O = AC \cap BD$. Gọi $M; N$ lần lượt là trung điểm của cạnh SD và $SB.$ Do $SA \perp (ABCD)$ nên suy ra $SA \perp BC.$ Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AN \quad (1)$	0,25
	Do $SA = AB = a$ và $NS = NB$ nên tam giác SAB cân tại S. Do đó $AN \perp SB \quad (2)$ Từ (1) và (2), suy ra $AN \perp (SBC)$. Do đó $AN \perp SC$ (*)	0,25
	Chứng minh tương tự $AM \perp SC$ (**)	0,25
	Từ (*) và (**), ta suy ra $SC \perp (AMN)$. Do đó, mặt phẳng (α) là mặt phẳng (AMN). Gọi $E = SO \cap MN$ và $P = AE \cap SC$. Ta có $P = SC \cap (\alpha)$.	0,25
	Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $AMPN$.	0,25
	Do $SA \perp (ABCD)$ nên suy ra $SA \perp BD.$ Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AP.$ Mà MN song song với BD (do M, N là đường trung bình của tam giác SDB). Suy ra $MN \perp AP.$	0,25
	Ta có $MN = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$ Do $(\alpha) \perp SC$ nên $AP \perp SC$. Suy ra $AP = \frac{SA.AC}{SC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$ Diện tích thiết diện cần tìm là $S_{AMPN} = \frac{1}{2}.AP.MN = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$	0,25

- - Hết - -