SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **PHÚ YÊN**	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT MÔN TOÁN – LỚP 12 NĂM HỌC 2020 - 2021 Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề) Ngày thi: 06/10/2020

Câu 1: *(3,0 điểm)*

Giải phương trình $x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}=11$.

Câu 2: *(3,0 điểm)*

Cho hệ phương trình $\begin{cases} xyz+z=a \\ xyz^2+z=b \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Tìm tất cả các giá trị của a,b để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c\,(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1,x_2 thuộc $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$.

b) Cho a,b,c là các số dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\geq 6$.

Câu 4: *(5,0 điểm)*

a) Cho điểm M tùy ý nằm bên trong tam giác ABC. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các tam giác MBC, MAC, MAB. Chứng minh rằng $S_1.\overrightarrow{MA}+S_2.\overrightarrow{MB}+S_3.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

b) Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol $(P): y=x^2+px+q$ với $(q\neq 0)$. Biết rằng (P) cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A,B và cắt trục Oy tại C. Chứng minh rằng khi p và q thay đổi, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5: *(3,0 điểm)*

Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1=2; u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{2u_n-1}$, với $n=1.2.3...$.

a) Chứng minh rằng dãy số (u_n) giảm và bị chặn.

b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Câu 6: *(3,0 điểm)*

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f\left(\dfrac{x+y}{2020}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2019}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^+$.

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Giải phương trình $x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}=11$.

Lời giải

Điều kiện: $-3\le x\le \dfrac{3}{2}$ $(*)$.

Với điều kiện $(*)$ phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$4\sqrt{x+3}-(x+7)+2\left[\sqrt{3-2x}-(2-x)\right]=0 \Leftrightarrow \frac{4(x+3)-(x+7)^2}{4\sqrt{x+3}+(x+7)}+2.\frac{3-2x-(2-x)^2}{\sqrt{3-2x}+(2-x)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+2x-1}{4\sqrt{x+3}+x+7}+2.\frac{-x^2+2x-1}{\sqrt{3-2x}+2-x}=0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(\frac{-1}{4\sqrt{x+3}+x+7}+\frac{-2}{\sqrt{3-2x}+2-x}\right)=0.$$

Với $-3\le x\le \dfrac{3}{2}$ thì $4\sqrt{x+3}+x+7>0$, $\sqrt{3-2x}+2-x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3-2x}+1\right)^2>0$.

Từ đó suy ra: $\dfrac{-1}{4\sqrt{x+3}+x+7}+\dfrac{-2}{\sqrt{3-2x}+2-x}<0$, $\forall x\in\left[-3;\dfrac{3}{2}\right]$.

Từ phương trình trên ta được: $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1\}$.

Câu 2: Cho hệ phương trình $\begin{cases} xyz+z=a \\ xyz^2+z=b \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Tìm tất cả các giá trị của a,b để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Giả sử (x_0,y_0,z_0) là nghiệm của hệ phương trình, khi đó $(-x_0,-y_0,z_0)$ cũng là nghiệm. Do đó để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì:

$$\begin{cases} x_0=-x_0 \\ y_0=-y_0 \\ z_0=z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=0 \\ z=z_0 \end{cases}.$$

Từ hệ phương trình: $x^2+y^2+z^2=4\Rightarrow \begin{cases} z^2=4 \\ z=a \\ z=b \end{cases} \Rightarrow (a,b)\in\{(2,2),(-2,-2)\}$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$ Ta có : $\begin{cases} xyz+z=2 \\ xyz^2+z=2 \end{cases} \Rightarrow 0=xyz(z-1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xyz=0 \\ z=1 \end{array}\right.$.

Với $z=1$ ta có : $\begin{cases} xy=1 \\ x^2+y^2=3 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ hoặc $(x,y)=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$ thì hệ phương trình có 2 nghiệm (loại).

Trường hợp 2: $\begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}$ Ta có : $\begin{cases} xyz+z=-2 \\ xyz^2+z=-2 \end{cases} \Rightarrow 0=xyz(z-1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xyz=0 \\ z=1 \end{array}\right.$.

Với $z=1$ ta có : $\begin{cases} xy=-3 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$.

Ta có $(x+y)^2=(x^2+y^2)+2xy=3-6<0$ nên hệ phương trình vô nghiệm.

Tương tự $z=0$ nên hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy $\begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}$ ta có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases}$.

Câu 3:

a) Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c\,(a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1,x_2 thuộc $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$.

b) Cho a,b,c là các số dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\geq 6$.

Lời giải

a) Áp dụng định lí Viet: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a};x_1.x_2=\dfrac{c}{a}$.

Ta có: $A=\dfrac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$

$$=\frac{(1-\frac{b}{a})(2-\frac{b}{a})}{1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}=\frac{(1+x_1+x_2)(x_1+1+x_2+1)}{1+x_1+x_2+x_1x_2}$$

$$=\frac{(x_1+1)(1+x_1+x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}+\frac{(x_2+1)(1+x_1+x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$=(1+\frac{x_1}{x_2+1})+(1+\frac{x_2}{x_1+1}).$$

Không mất tổng quát giả sử $x_1\geq x_2$.

$\Rightarrow x_2(x_2-x_1)+x_1^2-1\leq 0$ $\left(\text{do}\, x_1,x_2\in[0;1]\right)$.

$\Rightarrow x_2^2+x_1^2\leq x_1x_2+1$

$\Rightarrow x_2^2+x_2+x_1^2+x_1\leq x_1x_2+x_2+x_1+1$

$\Rightarrow \dfrac{x_2}{x_1+1}+\dfrac{x_1}{x_2+1}\leq 1$.

$\Rightarrow A\leq 3$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=-\dfrac{b}{2}=c$.

b) Ta có: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{bc}};\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{ca}};\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{c^2}{ab}}$.

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta được:

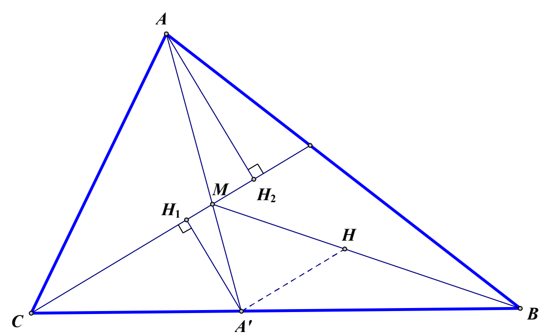
$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$. Nên suy ra $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \ge 6$.

Dấu $"="$ xảy ra khi $a=b=c$.

Câu 4:

a) Cho điểm M tùy ý nằm bên trong tam giác ABC. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các tam giác MBC, MAC, MAB. Chứng minh rằng $S_1.\overrightarrow{MA}+S_2.\overrightarrow{MB}+S_3.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Lời giải



Gọi A' là giao điểm của đường thẳng MA với BC. Ta có:

$$\overrightarrow{MA'}=\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA'}=\frac{MH}{MB}.\overrightarrow{MB}+\frac{HA'}{MC}.\overrightarrow{MC}=\frac{A'C}{BC}.\overrightarrow{MB}+\frac{A'B}{BC}.\overrightarrow{MC}.$$

Ta có $\overrightarrow{MA}=\frac{MA}{MA'}.\overrightarrow{A'M}=\frac{MA}{MA'}.\left(\frac{A'C}{BC}.\overrightarrow{BM}+\frac{A'B}{BC}.\overrightarrow{CM}\right)=\frac{MA}{MA'}.\frac{A'C}{BC}.\overrightarrow{BM}+\frac{MA}{MA'}.\frac{A'B}{BC}.\overrightarrow{CM}$.

Mặt khác $\frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta MA'C}}.\frac{S_{\Delta MA'C}}{S_{\Delta MBC}}=\frac{d\left(A,MC\right).MC}{d\left(A',MC\right).MC}.\frac{d\left(M,A'C\right).A'C}{d\left(M,BC\right).BC}=\frac{MA}{MA'}.\frac{A'C}{BC}$.

Tương tự ta có $\frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta MA'B}}.\frac{S_{\Delta MA'B}}{S_{\Delta MBC}}=\frac{MA}{MA'}.\frac{A'B}{BC}$.

Thay vào ta được:

$$\overrightarrow{MA}=\frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta MBC}}.\overrightarrow{BM}+\frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta MBC}}.\overrightarrow{CM}.$$

Suy ra $\overrightarrow{MA}.S_{\Delta MBC}+S_{\Delta MAC}.\overrightarrow{MB}+S_{\Delta MAB}.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, điều phải chứng minh.

b) Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol $\left(P\right): y=x^2+px+q$ với $\left(q\neq 0\right)$. Biết rằng $\left(P\right)$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A,B và cắt trục Oy tại C. Chứng minh rằng khi p và q thay đổi, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Xét phương trình $x^2+px+q=0$ có $\Delta=p^2-4q>0$ và có hai nghiệm là $x_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

Khi đó (P) cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt $A=(x_1;0)$, $B=(x_2;0)$ và (P) cắt Oy tại điểm $C=(0;q)$.

Gọi $I(x,y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}IA=IB\\IA=IC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\dfrac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2=\left(x-\dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2\\\left(x+\dfrac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2+y^2=x^2+(y-q)^2\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-p}{2}\\\left(x+\dfrac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2+y^2=x^2+(y-q)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{p}{2}\\y=\dfrac{1}{2}q+\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Khi đó bán kính:

$R=IC=\dfrac{1}{2}\sqrt{p^2+(q-1)^2}$.

Suy ra phương trình đường tròn là:

$x^2+y^2+px-(q+1)y+q=0\Leftrightarrow x.p+(1-y)q+x^2+y^2-y=0$.

Do đường tròn đi qua điểm cố định với mọi p,q nên phương trình trên phải vô số nghiệm $(p;q)$ suy ra $\begin{cases}x=0\\y=1\\y^2-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$. Vậy điểm cố định là $M(0;1)$.

Câu 5: Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1=2;u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{2u_n-1}$, với $n=1.2.3\ldots$.

a) Chứng minh rằng dãy số (u_n) giảm và bị chặn.

b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Lời giải

a) Ta có $u_n^2=u_n^2+1-1\ge 2|u_n|-1$.

Do đó $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{2u_n-1}\ge 1,\forall n$.

Mặt khác $u_{n+1}-u_n=u_n\left(\dfrac{1-3u_n}{2u_n-1}\right)<0,\forall n$.

Suy ra dãy (u_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1 và bị chặn trên bởi $u_1=2$.

b) Ta có $\dfrac{1}{u_{n+1}}=\dfrac{2}{u_n}-\dfrac{1}{u_n^2}$.

Đặt $v_n=\dfrac{1}{u_n}$, ta có $v_{n+1}=2v_n-v_n^2 \Leftrightarrow v_{n+1}-1=2v_n-v_n^2-1 \Leftrightarrow v_{n+1}-1=-(v_n-1)^2$.

$\Leftrightarrow v_{n+1}-1=(v_{n-1}-1)^4 \Leftrightarrow v_{n+1}-1=(-1)^{n+1}(v_1-1)^{2n}=(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$.

Suy ra $v_{n+1}=(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}+1$, hay $v_n=(-1)^n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-2}+1 \Rightarrow u_n=\dfrac{1}{1+(-1)^n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-2}}$.

Câu 6: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f\left(\dfrac{x+y}{2020}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2019}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^+$.

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn điều kiện trên.

Cho $y=x$, ta suy ra $f\left(\dfrac{x}{1010}\right)=\dfrac{2f(x)}{2019}$, $\forall x>0$.

Áp dụng đẳng thức trên, ta suy ra:

$$\frac{f(x)+f(y)}{2019}=f\left(\frac{x+y}{2020}\right)=f\left(\frac{\frac{x+y}{2}}{1010}\right)=\frac{2f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2019},\ \forall x,y>0.$$

Từ đó, ta rút ra đẳng thức (1) rất quan trọng là:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x,y>0 \qquad (1).$$

Thay y bởi $y+z$, ta dễ dàng suy ra:

$$f\left(\frac{x+y+z}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y+z)}{2}=\frac{f(x)+\frac{f(2y)+f(2z)}{2}}{2},\ \forall x,y,z>0.$$

Từ đó, với vai trò $x,\ y,\ z$ như nhau, ta sẽ suy ra:

$$f(x)+\frac{f(2y)+f(2z)}{2}=\frac{f(2x)+f(2y)}{2}+f(z),\ \forall x,y,z>0.$$

Do đó, ta phải có:

$f(2x)-2f(x)=f(2z)-2f(z)=C$, $\forall x,\ z>0$.

Kết hợp với đẳng thức (1), ta sẽ có:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}=\frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)+C+2f\left(\frac{y}{2}\right)+C}{2},\ \forall x,\ y>0.$$

Nói cách khác, ta phải có:

$$f\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)=2f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{y}{2}\right)+C,\ \forall x,\ y>0.$$

Đặt $g(x)=f(x)+C$, ta có $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$g(x+y)=g(x)+g(y)$, $\forall x,\ y>0$.

Hơn nữa, g cũng phải thỏa năm điều kiện:

$$g\left(\frac{x}{1010}\right)-C=\frac{2}{2019}\left(g(x)-C\right),\ \forall x>0.$$

Nói cách khác, ta sẽ có:

$$g\left(\frac{x}{1010}\right)=\frac{2g(x)}{2019}+\frac{2017}{2019}C,\ \forall x>0.$$

Chứng minh bằng qui nạp, ta được $g(x)=xg(1)$ với mọi $x\in\mathbb{Q}\cap(0;+\infty)$. Nên cho hằng số $C=f(2x)-2f(x)=0$ thỏa mãn điều kiện với mọi x hữu tỷ dương thì:

$$\frac{xg(1)}{1010}=\frac{2xg(1)}{2019}+\frac{2017}{2019}C\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1010}-\frac{2}{2019}\right)xg(1)=\frac{2017}{2019}C\ .$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $g(1)=0$.

Thế thì ta phải có $g(x)=f(x)$ với mọi $x>0$ và $f(2x)-2f(x)=0$, với mọi $x>0$.

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,\ y>0 \\ f\left(\dfrac{x}{1010}\right)=\dfrac{2f(x)}{2019},\ \forall x>0 \end{cases}.$$

Cuối cũng, không khó để chứng minh được:

$$1010f\left(\frac{x}{1010}\right)=\underbrace{f\left(\frac{x}{1010}\right)+\ldots+f\left(\frac{x}{1010}\right)}_{1010\text{ lan}}=f\left(\underbrace{\frac{x}{1010}+\ldots+\frac{x}{1010}}_{1010\text{ lan}}\right)=f(x),\ \forall x>0.$$

Cho nên ta có phương trình:

$$\frac{f(x)}{1010}=\frac{2f(x)}{2019},\ \forall x>0\ \Leftrightarrow f(x)=0,\ \forall x>0.$$

Thử lại, ta thấy hàm số $f(x)=0$ với mọi $x>0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

____________________ HẾT ____________________