SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO CÀ MAU	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT MÔN TOÁN – LỚP 12 NĂM HỌC 2020 - 2021 Thời gian làm bài: **180 phút** (không kể thời gian phát đề) Ngày thi: **04 tháng 10 năm 2020**

Câu 1: *(3,0 điểm)*

Giải các phương trình sau:

a) $\cos 2x - 5\sin x + \sqrt{3}\sin 2x - 5\sqrt{3}\cos x + 8 = 0$.

b) $(x-3)\sqrt{1+x} - x\sqrt{4-x} = 2x^2 - 6x - 3$.

Câu 2: *(3,0 điểm)*

a) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Tìm các điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x + m}$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Câu 3: *(3,0 điểm)*

Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;2)$, đường trung tuyến và đường phân giác trong hạ từ đỉnh B lần lượt có phương trình $d: 2x - 3y = 2$, $d_1: 9x - 3y = 16$. Tìm tọa độ đỉnh C của tam giác ABC.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a. Biết $SA = SB = SC = a$. Đặt $SD = x\left(0 < x < a\sqrt{3}\right)$.

a) Tính số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ khi $x = a$.

b) Tính x theo a sao cho tích $AC.SD$ lớn nhất.

Câu 5: *(3,0 điểm)*

a. Cho đa giác đều có 24 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của (H). Tính xác suất để 4 đỉnh chọn được tạo thành một hình chữ nhật nhưng không phải là hình vuông.

b. Cho $P(x) = (1 + 4x + 3x^2)^{13}$. Xác định hệ số của x^3 trong khai triển $P(x)$ theo lũy thừa của x.

Câu 6: *(3,0 điểm)*

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{3u_n^2 + 2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

b) Tính tổng $S = u_1^2 + u_2^2 + ... + u_{2020}^2$.

Câu 7: *(2,0 điểm)*

Cho hai số thực thay đổi x, y với $x > 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy^2}{(x^2 + 3y^2)(x + \sqrt{x^2 + 12y^2})}.$$

_________________ **HẾT** _________________

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Giải các phương trình sau:

a) $\cos 2x - 5\sin x + \sqrt{3}\sin 2x - 5\sqrt{3}\cos x + 8 = 0$.

b) $(x-3)\sqrt{1+x} - x\sqrt{4-x} = 2x^2 - 6x - 3$.

Lời giải

a) $\cos 2x - 5\sin x + \sqrt{3}\sin 2x - 5\sqrt{3}\cos x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow -5\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) + \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow -5\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow -5\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 4 = 0$

Đặt $t = x + \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = 2t - \frac{\pi}{2}$.

Phương trình trở thành $-5\sin t + \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) + 4 = 0$.

$\Leftrightarrow -5\sin t - \cos 2t + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 t - 5\sin t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 1 \\ \sin t = \frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

b) $(x-3)\sqrt{1+x} - x\sqrt{4-x} = 2x^2 - 6x - 3$.

Điều kiện: $-1 \le x \le 4$.

$PT \Leftrightarrow (x-3)\left(\sqrt{1+x} - 1\right) + x\left(1 - \sqrt{4-x}\right) = 2x^2 - 6x$

$\Leftrightarrow \frac{x(x-3)}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{x(x-3)}{1+\sqrt{4-x}} = 2x(x-3)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x(x-3) = 0 & (1) \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} = 2 & (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Xét phương trình (2): Ta có $\begin{cases} \sqrt{1+x} + 1 \ge 1 \\ 1 + \sqrt{4-x} \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} \le 2$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$ (vô lí). Vậy phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 3$.

Câu 2:

a) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		8		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	+	0	−	

Tìm các điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^2-2x)$.

Lời giải

Ta có $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-3 \\ x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=1 \\ x^2-2x=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\ (\mathrm{BC}) \\ x=1\pm\sqrt{2}\ (\mathrm{BC}) \\ x=-2;\ x=4 \end{array}\right.$.

Vậy các điểm cực trị của hàm số $g(x)$ lần lượt là $x=-2;\ x=1;\ x=4$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2-3x}{x+m}$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Lời giải

ĐK: $x\neq -m$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2mx-3m}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $[1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y'\geq 0,\ \forall x\in[1;+\infty) \\ -m\notin[1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2mx-3m\geq 0,\ \forall x\in[1;+\infty)\ (*) \\ m>-1 \end{cases}$.

$(*) \Leftrightarrow \min\limits_{[1;+\infty)} f(x)\geq 0$ với $f(x)=x^2+2mx-3m$.

Đồ thị của hàm số $f(x)$ là parabol có toạ độ đỉnh $I(-m;-m^2-3m)$.

BBT:

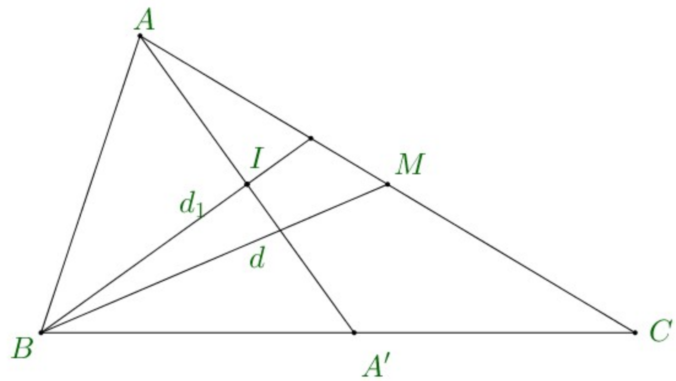
x	$-m$		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	$1-m$	↗	

Dựa vào BBT, suy ra $\min\limits_{[1;+\infty)} f(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-m\geq 0 \Leftrightarrow m\leq 1$.

Vậy $-1<m\leq 1$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;2)$, đường trung tuyến và đường phân giác trong hạ từ đỉnh B lần lượt có phương trình $d: 2x-3y=2$, $d_1: 9x-3y=16$. Tìm tọa độ đỉnh C của tam giác ABC.

Lời giải



Ta có $d \cap d_1 = B$ nên toạ độ điểm B thoả hệ phương trình $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 9x-3y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Do đó $B\left(2;\dfrac{2}{3}\right)$.

Gọi $A'(a;b)$ là điểm đối xứng với A qua $d_1 \Rightarrow A' \in BC$.

Khi đó trung điểm của AA' là $I\left(\dfrac{1+a}{2};\dfrac{2+b}{2}\right) \in d_1$ và $\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{u_{d_1}}$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 9\left(\dfrac{1+a}{2}\right)-3\left(\dfrac{2+b}{2}\right)=16 \\ a-1+3(b-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{18}{5} \\ b=\dfrac{17}{5} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\dfrac{18}{5};\dfrac{17}{5}\right).$$

Đường thẳng BC đi qua điểm $B\left(2;\dfrac{2}{3}\right)$ nhận vectơ $\overrightarrow{A'B}=\left(\dfrac{-8}{5};\dfrac{-41}{15}\right)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $72x+123y-226=0$.

Gọi M là trung điểm của đoạn AC.

Do $C \in BC \Rightarrow C\left(t;\dfrac{226-72t}{123}\right) \Rightarrow M\left(\dfrac{t+1}{2};\dfrac{472-72t}{123}\right)$.

$M \in d \Leftrightarrow 2.\dfrac{t+1}{2}-3.\dfrac{472-72t}{123}=2 \Leftrightarrow t=\dfrac{513}{113}$ suy ra $C\left(\dfrac{513}{113};\dfrac{-278}{339}\right)$.

Câu 4:

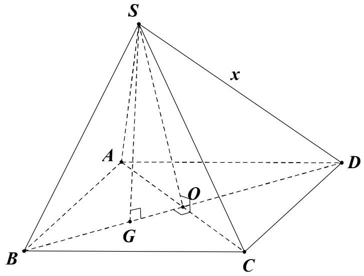
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a. Biết $SA=SB=SC=a$. Đặt $SD=x\left(0<x<a\sqrt{3}\right)$.

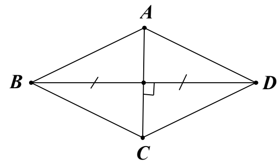
a) Tính số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ khi $x=a$.

b) Tính x theo a sao cho tích $AC.SD$ lớn nhất.

Lời giải

Cách 1:





a) Tính số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ khi $x=a$.

Gọi O là hình chiếu của S lên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$.

Ta có: $SA=SB=SC=SD=a\Rightarrow OA=OB=OC=OD\Rightarrow ABCD$ là hình vuông.
Xét tam giác vuông:

$$\cos\widehat{SBC}=\frac{BO}{SB}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{SBC}=45^0.$$

b) Tính x theo a sao cho tích $AC.SD$ lớn nhất.
Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Do $SA=SB=SC\Rightarrow SG\perp\left(ABCD\right)$.

Ta có: $\begin{cases}AC\perp BD\\AC\perp SG\end{cases}\Rightarrow AC\perp\left(SBD\right)\Rightarrow AC\perp SO$.

$\Delta SOC=\Delta BOC$ (do $SC=BC=a$, OC chung).
$SO=OB=OD\Rightarrow\Delta BSD$ vuông tại S.

$$BD^2=a^2+x^2\Rightarrow OD=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{2}.$$

$$OA^2=AD^2-OD^2=a^2-\frac{a^2+x^2}{4}=\frac{3a^2-x^2}{4}.$$

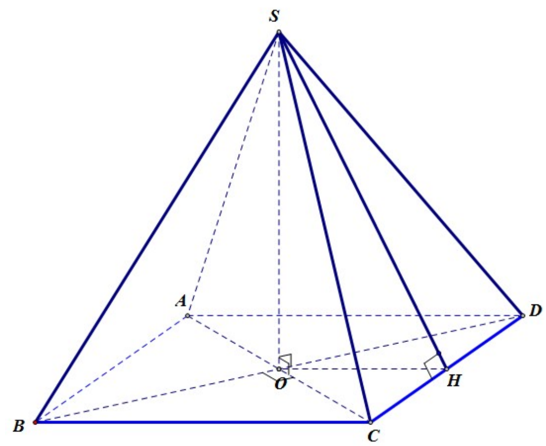
$$\Rightarrow OA=\frac{\sqrt{3a^2-x^2}}{2}\Rightarrow AC=\sqrt{3a^2-x^2}.$$

Xét $AC.SD=x.\sqrt{3a^2-x^2}\le\frac{x^2+3a^2-x^2}{2}=\frac{3a^2}{2}$.

Dấu $"="$ xảy ra khi $x=\sqrt{3a^2-x^2}\Leftrightarrow 2x^2=3a^2\Leftrightarrow x^2=\frac{3a^2}{2}\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Cách 2:

a) Tính số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ khi $x=a$.

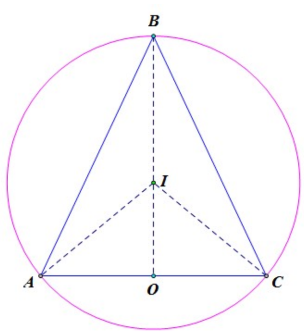


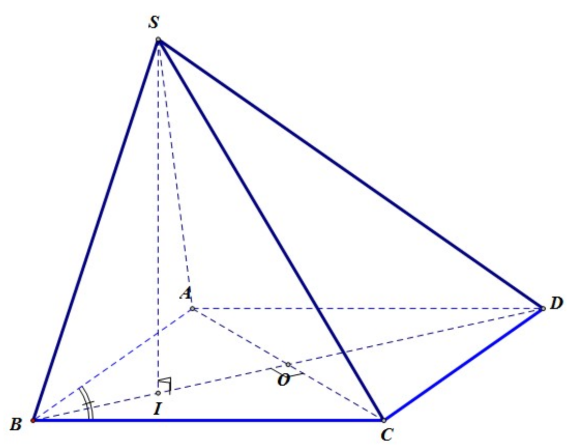
Do $SA = SB = SC = SD = a \Rightarrow SO \perp (ABCD)$. Gọi H là trung điểm của CD suy ra $CD \perp (SOH) \Rightarrow CD \perp OH \Rightarrow ABCD$ là hình vuông.

Từ đó ΔSBD vuông cân tại S, nên $\widehat{(SB,(ABCD))} = \widehat{SBD} = 45°$.

b) Tính x theo a sao cho tích $AC.SD$ đạt giá trị lớn nhất.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$, do $SA = SB = SC = a$ nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, dễ thấy I thuộc đường thẳng BO.





Đặt $\widehat{ABC} = \alpha$. Ta có $AC = 2R\sin\alpha$. Suy ra $BO = \sqrt{a^2 - R^2\sin^2\alpha}$.

Theo công thức tính diện tích tam giác ABC ta có: $\frac{1}{2}.a^2.\sin\alpha = \frac{1}{2}.\sqrt{a^2 - R^2.\sin^2\alpha}.2R\sin\alpha$

$\Leftrightarrow a^2 = 4R^2\left(a^2 - R^2.\sin^2\alpha\right) \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R^2}$.

Mặt khác xét tam giác vuông SBI và tam giác vuông SID ta có:

$SI^2 = a^2 - R^2 = x^2 - \left(2\sqrt{a^2 - R^2\sin^2\alpha} - R\right)^2$.

Thay $\sin\alpha = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R^2}$ vào rút gọn ta được $R = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Nên $AC = 2R\sin\alpha = \sqrt{3a^2 - x^2}$. Từ đó $AC.SD = x\sqrt{3a^2 - x^2} = \sqrt{-x^4 + 3a^2x^2}$.

Xét hàm số $f(x) = -x^4 + 3a^2x^2$ với $\left(0 < x < a\sqrt{3}\right)$.

Có $f'(x)=-4x^3+6a^2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{6}a}{2} \end{array}\right.$ do $x\in\left(0;\sqrt{3}a\right)$ nên ta nhận $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$.

Lập bảng biến thiên ta được $\max\limits_{\left(0;\sqrt{3}a\right)} f(x)=f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\right)$. Vậy khi $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$ thì $AC.SD$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5:

a. Cho đa giác đều có 24 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của (H). Tính xác suất để 4 đỉnh chọn được tạo thành một hình chữ nhật nhưng không phải là hình vuông.

b. Cho $P(x)=\left(1+4x+3x^2\right)^{13}$. Xác định hệ số của x^3 trong khai triển $P(x)$ theo lũy thừa của x.

Lời giải

a. Số phần tử của không gian mẫu là : C_{24}^4.

Đa giác đều có 24 đỉnh thì có 12 đường chéo đi qua tâm nên số hình chữ nhật , kể cả hình vuông là : C_{12}^2 hình.

Ứng với 1 đường chéo thì có một đường chéo duy nhất để tạo thành hình vuông, nên số hình vuông là 6.

Nên số hình chữ nhật cần tìm là C_{12}^2-6.

Vậy xác suất cần tìm là : $\dfrac{C_{12}^2-6}{C_{24}^4}=\dfrac{10}{1771}$.

b. $P(x)=\left(1+4x+3x^2\right)^{13}=\left[(1+4x)+3x^2\right]^{13}=C_{13}^0(1+4x)^{13}+C_{13}^1(1+4x)^{12}.3x^2+...$

$=(1+4x)^{13}+13(1+4x)^{12}.3x^2+...=(1+4x)^{13}+39(1+4x)^{12}.x^2+...$

* Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $(1+4x)^{13}$:

$(1+4x)^{13}=\sum\limits_{k=0}^{13}C_{13}^k.1^{13-k}(4x)^k=\sum\limits_{k=0}^{13}C_{13}^k.4^k.x^k$.

Ta có $k=3$ nên hệ số của x^3 là : $C_{13}^3.4^3$.

* Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $(1+4x)^{12}.x^2$ tức là tìm hệ số của x trong khai triển $(1+4x)^{12}$.

Ta có $(1+4x)^{12}=\sum\limits_{k=0}^{12}C_{12}^m.1^{12-m}(4x)^m=\sum\limits_{k=0}^{12}C_{12}^m.4^m.x^m$.

Từ đó $m=1$ nên hệ số của x^3 là : $C_{12}^1.4$.

Vậy hệ số của x^3 trong khai triển $P(x)$ là : $C_{13}^3.4^3+39.C_{12}^1.4=20176$.

Câu 6:

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=1$ và $u_{n+1}=\sqrt{3u_n^2+2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

b) Tính tổng $S=u_1^2+u_2^2+...+u_{2020}^2$.

Lời giải

a) Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Ta có: $u_{n+1}=\sqrt{3u_n^2+2}\Rightarrow u_{n+1}^2+1=3\left(u_n^2+1\right),\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Đặt $v_n=u_n^2+1\Rightarrow\begin{cases}v_1=2\\v_{n+1}=3v_n,\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$.

Suy ra (v_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $v_1=2$, công bội $q=3$.

$\Rightarrow v_n=2.3^{n-1},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$\Rightarrow u_n=\sqrt{2.3^{n-1}-1},\forall n\in\mathbb{N}^*$ là số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

b) Tính tổng $S=u_1^2+u_2^2+...+u_{2020}^2$.

Ta có: $S=u_1^2+u_2^2+...+u_{2020}^2=2\left(1+3+3^2+...+3^{2019}\right)-2020$.

$=2.\dfrac{1-3^{2020}}{1-3}-2020=3^{2020}-2021$.

Vậy $S=3^{2020}-2021$.

Câu 7: Cho hai số thực thay đổi x,y với $x>0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{xy^2}{(x^2+3y^2)(x+\sqrt{x^2+12y^2})}$.

Lời giải

$$P=\frac{xy^2}{(x^2+3y^2)(x+\sqrt{x^2+12y^2})}=\frac{\frac{y^2}{x^2}}{(1+3\frac{y^2}{x^2})(1+\sqrt{1+12\frac{y^2}{x^2}})}\text{ (do } x>0\text{)}.$$

Đặt $\dfrac{y}{x}=t$.

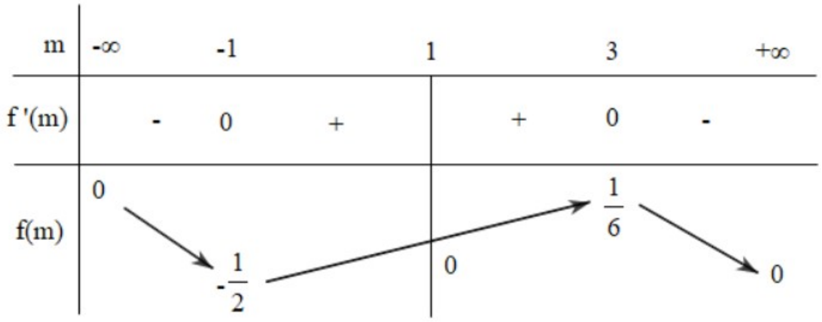
Khi đó: $P=\dfrac{t^2}{(1+3t^2)(1+\sqrt{1+12t^2})}=\dfrac{t^2(1-\sqrt{1+12t^2})}{(1+3t^2)(-12t^2)}=\dfrac{1}{12}.\dfrac{\sqrt{1+12t^2}-1}{1+3t^2}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{1+12t^2}-1}{12t^2+4}$.

Đặt $m=\sqrt{1+12t^2}\ge 1$.

Khi đó $P=\dfrac{1}{3}.\dfrac{m-1}{m^2+3}\Leftrightarrow 3P=\dfrac{m-1}{m^2+3}=f(m)$.

$$f'(m)=\frac{m^2+3-2m(m-1)}{(m^2+3)^2}=\frac{-m^2+2m+3}{(m^2+3)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=3\end{array}\right.$$



$\Rightarrow 0 \le 3P \le \frac{1}{6} \Leftrightarrow 0 \le P \le \frac{1}{18}$.

\+ $P \ge 0$, dấu $"="\Leftrightarrow m=1 \Leftrightarrow y=0$.

\+ $P \le \frac{1}{18}$, dấu $"="\Leftrightarrow m=3 \Leftrightarrow 2x^2=3y^2$.

Vậy $MinP=0 \Leftrightarrow y=0$; $MaxP=\frac{1}{18} \Leftrightarrow 2x^2=3y^2$.

HẾT