SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HƯNG YÊN ĐỀ THI CHÍNH THỨC	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH NĂM HỌC 2019 - 2020 Môn thi: TOÁN *Thời gian làm bài 180 phút (không kể thời gian phát đề)*

Câu I (***6,0 điểm***).

1. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m). Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 1 - x$ cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt sao cho tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại hai trong ba điểm đó vuông góc với nhau.

2. Cho hàm số $y = \dfrac{(x+1)^2}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của (C) với $x_1 < x_2$. Tìm điểm *M* trên trục tung sao cho $T = 2MA^2 - MB^2 + \left|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu II (***4,0 điểm***).

1. Giải phương trình: $\dfrac{1}{2}\log_{1+\sqrt{3}}(2x+2) = \log_{3+2\sqrt{3}}(2x+1)$.

2. Cho các số thực $a, b, c \in [2;8]$ và thỏa mãn điều kiện $abc = 64$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_2^2 a + \log_2^2 b + \log_2^2 c$.

Câu III (***5,0 điểm***).

1. Cho hình chóp *S.ABCD* có $ABCD$ là hình thang cân với $AD = 2a, AB = BC = CD = a$, cạnh *SA* vuông góc với đáy. Gọi *M* là trung điểm của *SB* và *N* là điểm thuộc đoạn *SD* sao cho $NS = 2ND$. Biết khoảng cách từ *S* đến mặt phẳng (*AMN*) bằng $\dfrac{6a\sqrt{43}}{43}$, tính thể tích của khối chóp *S.ABCD* theo *a*.

2. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* có $\widehat{ABC} = 60^o$. Đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ cắt *AC* tại *I*. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng *AC*, vẽ nửa đường tròn tâm *I* tiếp xúc với cạnh *BC*. Cho miền tam giác *ABC* và nửa hình tròn trên quay quanh trục *AC* tạo thành các khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

Câu IV (***1,0 điểm***). Tìm họ nguyên hàm $I = \displaystyle\int \frac{\ln x + 1}{\sqrt{x\ln x + 1} + 1}dx$.

Câu V (***2,0 điểm***). Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} = \sqrt{7y - 3x + 8} \\ \sqrt[3]{3xy - 8x + 5} = xy^2 - 6x^2 + 12y + 7 \end{cases}$.

Câu VI (***2,0 điểm***). Cho dãy (a_n) xác định $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^{\ 2} + \dfrac{n+1}{2^n}}, \forall n \ge 1 \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát a_n và tính $\lim a_n$.

...........**HẾT**...........

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh ....*Số báo danh* ....

Giám thị coi thi ....

HƯỚNG DẪN GIẢI THAM KHẢO

Câu I. 1. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m). Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 1 - x$ cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt sao cho tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại hai trong ba điểm đó vuông góc với nhau.

Hướng dẫn

Giả sử có ba giao điểm là *A*, *B*, *C* khác nhau, phương trình hoành độ giao điểm là:

$x^3 + mx^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow A(0;-1) \\ x^2 + mx + 1 = 0\,(*) \end{array}\right.$. Dễ thấy $k_A = 0 \Rightarrow y_{tt} = -1$ suy ra không có tiếp tuyến vuông góc nhau tại *A*. Còn lại hai giao điểm *B*, *C* có hoành độ là nghiệm của (*).

Ta có $\begin{cases} x_1x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -m \end{cases}$ và để hai tiếp tuyến vuông góc nhau thì $x_1(3x_1 + 2m).x_2(3x_2 + 2m) = -1$

$\Rightarrow 9 - 6m^2 + 4m^2 = -1 \Rightarrow m^2 = 5 \Rightarrow m = \pm\sqrt{5}$, thỏa mãn $\Delta = m^2 - 4 > 0$.

Vậy các giá trị của *m* là $m = \pm\sqrt{5}$.

Câu I. 2. Cho hàm số $y = \dfrac{(x+1)^2}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là các điểm cực trị của (C) với $x_1 < x_2$. Tìm điểm *M* trên trục tung sao cho $T = 2MA^2 - MB^2 + \left|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn.

Ta có $y = x + \dfrac{1}{x+2}, x \neq -2 \Rightarrow y' = 1 - \dfrac{1}{(x+2)^2} \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = -1$ là hoành độ các điểm cực trị hay $A(-3;-4), B(-1;1)$. Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = 0 \Rightarrow I(-5;-9)$.

Khi đó $T = 2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 + \left|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right| = 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left|\overrightarrow{MI}\right|$

$T = 2IA^2 - IB^2 + MI^2 + MI = 2 + 5^2 + (y+9)^2 + \sqrt{5^2 + (y+9)^2} \geq 27 + 5 = 32$

Nên $T_{\min} = 32 \Leftrightarrow y = -9 \Leftrightarrow M(0;-9)$.

Câu II. 1. Giải phương trình: $\dfrac{1}{2}\log_{1+\sqrt{3}}(2x+2) = \log_{3+2\sqrt{3}}(2x+1)$.

Hướng dẫn.

PT $\dfrac{1}{2}\log_{1+\sqrt{3}}(2x+2) = \log_{3+2\sqrt{3}}(2x+1) = t \Leftrightarrow 2x + 2 = \left(1+\sqrt{3}\right)^{2t} = \left(3+2\sqrt{3}\right)^t + 1$

$\Rightarrow 1 = \left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\right)^t + \left(\dfrac{1}{4+2\sqrt{3}}\right)^t \Leftrightarrow f(t) = a^t + b^t - 1 = 0, (0 < a, b < 1)$, ta có

$f'(t) = a^t \ln a + b^t \ln b < 0, \forall t$ suy ra $f(t)$ nghịch biên trên $\mathbb{R}$ nên $f(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t = 1 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Câu II. 2. Cho các số thực $a, b, c \in [2;8]$ và thỏa mãn điều kiện $abc = 64$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_2^2 a + \log_2^2 b + \log_2^2 c$.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_2 a = x, \log_2 b = y, \log_2 c = z \Rightarrow x, y, z \in [1;3], x + y + z = 6$. Ta cần tìm GTLN của

$P = x^2 + y^2 + z^2$. Không giảm tổng quát ta giả sử $1 \le x \le y \le z \le 3 \Rightarrow x \in [1;2], z \in [2;3]$.

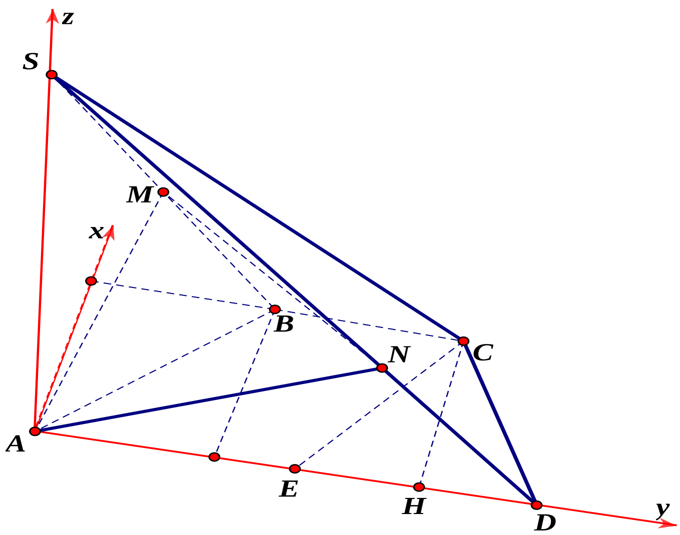
$P = x^2 + z^2 + (6 - z - x)^2 = 2z^2 - 2(6 - x)z + 36 + 2x^2 - 12x$ (Parabol đồng biến đối với *z* vì $\frac{6-x}{2} = 3 - \frac{x}{2} \in \left[2;\frac{5}{2}\right]$) $\Rightarrow P \le 2.3^2 - 6(6 - x) + 36 + 2x^2 - 12x = 2x^2 - 6x + 18 \le 14$ (tại $x = 1 \cup x = 2$) suy ra $P_{\max} = 14 \Leftrightarrow x = 1, y = 2, z = 3$ (loại $y = 1, x = 2, z = 3$).

Vậy $P_{\max} = 14 \Leftrightarrow a = 2, b = 4, c = 8$ (và các hoán vị).

Câu III. 1. Cho hình chóp *S.ABCD* có $ABCD$ là hình thang cân với $AD = 2a, AB = BC = CD = a$, cạnh *SA* vuông góc với đáy. Gọi *M* là trung điểm của *SB* và *N* là điểm thuộc đoạn *SD* sao cho $NS = 2ND$. Biết khoảng cách từ *S* đến mặt phẳng (*AMN*) bằng $\frac{6a\sqrt{43}}{43}$, tính thể tích của khối chóp *S.ABCD* theo *a*.

Hướng dẫn.

Gọi E là trung điểm của *AD* thì dễ dàng chứng minh được *ABCE* là hình thoi cạnh *a*, *CDE* là tam giác đều cạnh *a*. Kẻ *CH* vuông góc với *ED* thì $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và là đường cao của hình thang cân *ABCD*, suy ra $S_{ABCD} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.



Lấy $a = 1$. Dựng hệ tọa độ *Axyz* như hình vẽ, với $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right), D(0;2;0), S(0;0;3h)$, khi đó tọa độ các điểm $M\left(\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{1}{4};\frac{3h}{2}\right), N\left(0;\frac{2}{3};h\right)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = \left(-\frac{3h}{4}; -\frac{h\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, khi đó phương trình mặt phẳng (AMN) là

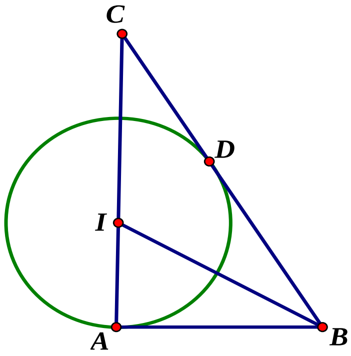
$3hx + h\sqrt{3}y - \frac{2\sqrt{3}}{3}z = 0$

Khoảng cách $d\left(S,(AMN)\right) = \frac{2h\sqrt{3}}{\sqrt{9h^2 + 3h^2 + \frac{4}{3}}} = \frac{6}{\sqrt{43}}$ suy ra

$43h^2 = 3\left(12h^2 + \frac{4}{3}\right) = 36h^2 + 4 \Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow S\left(0;0;\frac{6}{\sqrt{7}}\right)$ hay $SA = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$ và thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3}.\frac{6a\sqrt{7}}{7}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{21}}{14}$.

Câu III. 2. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* có $\widehat{ABC} = 60^o$. Đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ cắt *AC* tại *I*. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng *AC*, vẽ nửa đường tròn tâm *I* tiếp xúc với cạnh *BC*. Cho miền tam giác *ABC* và nửa hình tròn trên quay quanh trục *AC* tạo thành các khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Hướng dẫn.



Đặt $AB = a$, khi đó $AC = h = AB\tan 60^o = a\sqrt{3}, IA = R = AB\tan 30^o = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Khi cho tam giác *ABC* và nửa hình tròn tâm *I* quay xung xung quanh *AC* thì tạo thành khối nón tròn xoay và khối cầu. Ta có: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{non}}{V_{cau}} = \frac{\pi a^2 h / 3}{4\pi R^3 / 3} = \frac{a^2.a\sqrt{3}}{4.a^3\frac{\sqrt{3}}{9}} = \frac{9}{4}$.

Câu IV. Tìm họ nguyên hàm $I = \int \frac{1 + \ln x}{\sqrt{x\ln x + 1} + 1}dx$.

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{x\ln x + 1} + 1 = t \Rightarrow x\ln x + 1 = (t-1)^2 \Rightarrow (1 + \ln x)dx = 2(t-1)dt$, suy ra

$I(t) = \int \frac{2(t-1)}{t}dt = 2t - 2\ln t + C \Rightarrow I(x) = 2\sqrt{x\ln x + 1} - 2\ln\left(\sqrt{x\ln x + 1} + 1\right) + C$.

Câu V. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} = \sqrt{7y - 3x + 8} \\ \sqrt[3]{3xy - 8x + 5} = xy^2 - 6x^2 + 12y - 7 \end{cases}$.

Hướng dẫn.

+ Xét $x = -2$ thì từ phương trình đầu ta có $y = -2$ thế vào phương trình thứ hai không thỏa mãn. Lập luận tương tự đối với $y = -2$ ta suy ra điều kiện $x, y > -2$.

+ Biến đổi phương trình thứ nhất:

$1+\sqrt{\frac{y+2}{x+2}}=\sqrt{7\left(\frac{y+2}{x+2}\right)-3} \Leftrightarrow 1+\sqrt{t}=\sqrt{7t-3}, t>0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x=y>-2$.

Thế vào phương trình thứ hai: $\sqrt[3]{3x^2-8x+5}=x^3-6x^2+12x-7$ (*).

Đặt $\sqrt[3]{3x^2-8x+5}=t \Rightarrow 3x^2-8x+5=t^3$, từ (*) ta có $t^3+t=(x-1)^3+(x-1)=u^3+u$

Hay $(t-u)(t^2+tu+u^2+1)=0 \Leftrightarrow t=u=x-1$. Từ đó ta được:

$3x^2-8x+5=(x-1)^3 \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0 \Leftrightarrow x=1, x=2, x=3$ (thỏa mãn).

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm $(x,y)\in\{(1;1),(2;2),(3;3)\}$.

Câu VI. Cho dãy (a_n) xác định $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=\sqrt{a_n^{\ 2}+\frac{n+1}{2^n}}, \forall n\geq 1 \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát a_n và tính $\lim a_n$.

Hướng dẫn.

Dễ thấy dãy số đã cho là dãy số dương và tăng. Giả sử $a_n=\sqrt{4-\frac{n+2}{2^{n-1}}}, \forall n\geq 1$, khi đó ta có:

$a_1=1$ đúng, $a_{n+1}=\sqrt{4-\frac{n+2}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}}=\sqrt{4-\frac{2n+4}{2^n}+\frac{n+1}{2^n}}=\sqrt{4-\frac{n+3}{2^n}}$ (đúng tới *n* + 1).

Vậy $a_n=\sqrt{4-\frac{n+2}{2^{n-1}}}, \forall n\geq 1$. Suy ra $\lim a_n=\lim\sqrt{4-\frac{n+2}{2^{n-1}}}=\sqrt{4}=2$.

Lời bình: Nhìn chung đề này ở mức độ khá.

............**HẾT**............