SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

ĐỀ CHÍNH THỨC

(*Đề thi có 02 trang*)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP TỈNH
NĂM HỌC: 2019 - 2020
Ngày thi: 06/12/2019
Môn: TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: (5,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình sau (với $x, y \in \mathbb{R}$)

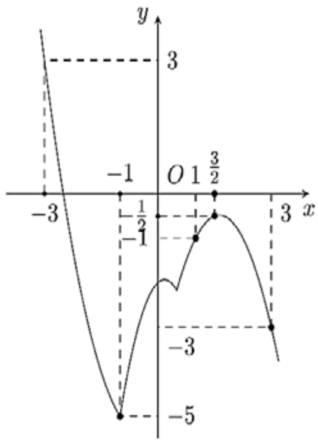
$$\begin{cases} y+\sqrt{x^2y+2x^2+2y+4}=2x^2+2 \\ 6y^2+2yx^2=6y+x \end{cases}.$$

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2

$$9.3^{x^2-2x}+\left(2m+11\right).3^{-x^2+2x-2}-4m+2=0.$$

Câu 2: (5,0 điểm).

a) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm các điểm cực trị của hàm số $g(x)=\dfrac{1}{2}f\left(2x-1\right)+x^2-x+2019$.



b) Anh Giàu hàng tháng gửi vào ngân hàng 5 triệu đồng theo thể thức lãi kép, kì hạn 1 tháng với lãi suất $0,65\%$/ tháng. Tính tổng số tiền anh Giàu nhận được khi gửi được 20 tháng.

Câu 3: (5,0 điểm).

Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt phẳng (SAB), (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$, tam giác ABC vuông cân tại B, $SB = a$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng α.

a) Tính theo a và α thể tích khối chóp $G.ANC$ với G là trọng tâm tam giác SBC, N là trung điểm BC.

b) Gọi M là trung điểm AC. Tìm giá trị của α để khoảng cách giữa hai đường thẳng MN, SC đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4: (3,0 điểm).

Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn chia hết cho 15.

Câu 5: (2,0 điểm).

Cho hàm số $f(x)=2019^x-2019^{-x}$. Các số thực a,b thỏa mãn $a+b>0$ và $f\left(a^2+b^2+ab+2\right)+f\left(-9a-9b\right)=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{4a+3b+1}{a+b+10}$ khi a,b thay đổi.

………………………..HẾT………………………..

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu	Nội dung	Điểm
1	**a**) Giải hệ phương trình sau (với $x,y\in\mathbb{R}$) $$\begin{cases} y+\sqrt{x^2y+2x^2+2y+4}=2x^2+2 \\ 6y^2+2yx^2=6y+x. \end{cases}$$ **b**) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 $$9.3^{x^2-2x}+(2m+11).3^{-x^2+2x-2}-4m+2=0$$	**5,0 đ**
1.a	Điều kiện $y\ge -2$. Ta có $y+\sqrt{x^2y+2x^2+2y+4}=2x^2+2$ $\Leftrightarrow\left(\sqrt{y+2}-\sqrt{x^2+2}\right)\left(\sqrt{y+2}+2\sqrt{x^2+2}\right)=0$	**1,0**
	Do đó $y=x^2$, thay vào phương trình sau ta được $8x^4+6x^3-x=0$ Suy ra $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ 4x^3-3x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$	**0,75**
	Ta thấy phương trình có ba nghiệm thuộc đoạn [-1;1] (dùng đồ thị hàm số).	**0,5**
	Với $-1\le x\le 1$ ta đặt $x = cost$ (với $t\in[0;\pi]$), phương trình trở thành $\cos 3t=\dfrac{1}{2}$ suy ra $t=\dfrac{\pi}{9},t=\dfrac{5\pi}{9},t=\dfrac{7\pi}{9}$ Như vậy hệ có nghiệm $(0;0),\left(\cos\dfrac{\pi}{9};\cos^2\dfrac{\pi}{9}\right),\left(\cos\dfrac{5\pi}{9};\cos^2\dfrac{5\pi}{9}\right),\left(\cos\dfrac{7\pi}{9};\cos^2\dfrac{7\pi}{9}\right)$	**0,75**

2.b — **0,5**

Viết lại phương trình $3^{x^2-2x+2}+\dfrac{2m+11}{3^{x^2-2x+2}}-4m+2=0$ (1)

Đặt $t=3^{x^2-2x+2}$.

Xét $t'=(2x-2x).3^{x^2-2x+2}.\ln 3$

x	$-\infty$		1		2
t'		-	0	+	|
t	$+\infty$	↘	3	↗	9

0,5

Từ bảng biến thiên suy ra mỗi giá trị $t_0\in(3;9)$ thì phương trình $3^{x^2-2x+2}=t_0$ có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2.

+ Phương trình (1) trở thành $t^2+2(1-2m)t+2m+11=0$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2+2t+11}{2t-1}=2m \quad (2).$$

0,5

+ Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 thuộc khoảng $(3;9)$.

+ $f(t)=\dfrac{t^2+2t+11}{2t-1}$, $t\in(3;9)$. $f'(t)=\dfrac{2t^2-2t-24}{(2t-1)^2}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=-3\\t=4\end{array}\right.$

0,5

Bảng biến thiên

t	3		4		9
$f'(t)$		-	0	+	|
$f(t)$	$\frac{26}{5}$	↘	5	↗	$\frac{110}{17}$

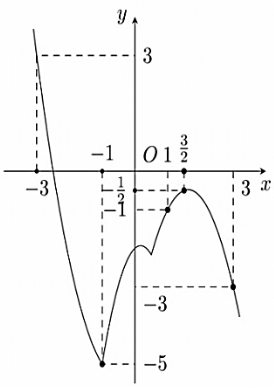
Từ bảng biến thiên suy ra (2) có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 thuộc khoảng $(3;9)$ khi

$$5<2m<\frac{26}{5}\Leftrightarrow\frac{5}{2}<m<\frac{13}{5}.$$

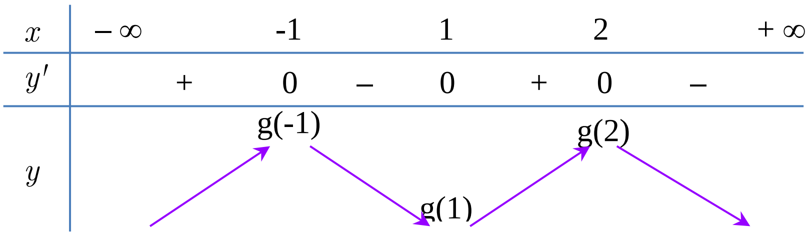
2 — **5,0 điểm**

a) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm các điểm cực trị của hàm số

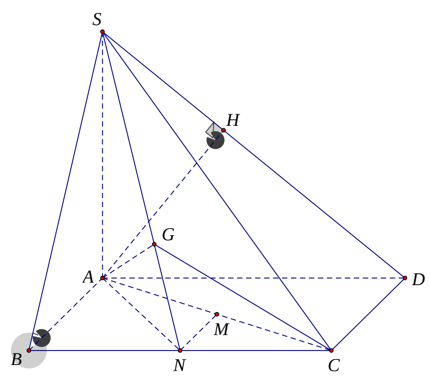
$$g(x)=\frac{1}{2}f(2x-1)+x^2-x+2019.$$



b) Anh Giàu hàng tháng gửi vào ngân hàng 5 triệu đồng theo thể thức lãi kép,kì hạn

	1 tháng với lãi suất $0,65\%/$ tháng. Tính tổng số tiền anh Giàu nhận được khi gửi được 20 tháng.	
2a (3,0đ)	Ta có $g'(x) = f'(2x-1) + 2x - 1$	**1,0**
	Suy ra $g'(x) = 0$ khi $2x-1=3, 2x-1=1$ hoặc $2x-1=3$ hay $x=-1, x=1, x=2$.	**1,0**
	Do đó bảng biến thiên của hàm số  Suy ra $x=1$ là điểm cực tiểu; $x=-1, x=2$ là các điểm cực đại của hàm số.	**1,0**

2.b (2,0đ)	• **Cuối tháng thứ 1**, ông Giàu có số tiền là: $P_1 = a + a.r = a(1+r)$ • **Đầu tháng thứ 2**, ông Giàu có số tiền là: $P_1 + a = a(1+r) + a = a + a(1+r) = a\left[1+(1+r)\right]$ .... • **Cuối tháng thứ 2**, ông Giàu có số tiền là: $P_2 = P_1 + P_1.r = a + a(1+r) + \left[a + a(1+r)\right] = a\left[(1+r)^2 + (1+r)\right]$ • **Đầu tháng thứ 3**, ông Giàu có số tiền là: $P_2 + a = a\left[(1+r)^2 + (1+r)\right] + a = a\left[1 + (1+r) + (1+r)^2\right]$ • **Cuối tháng thứ 3**, ông Giàu có số tiền là: $P_3 = P_2 + P_2.r = a\left[1+(1+r)+(1+r)^2\right] + a\left[1+(1+r)+(1+r)^2\right].r$ $= a\left[(1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r)\right]$ .... • **Cuối tháng thứ n**, ông Giàu có số tiền là: $P_n = a\left[\underbrace{(1+r)^n + (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + ... + + (1+r)^2 + (1+r)}_{S_n}\right]$ $\Leftrightarrow P_n = a(1+r).\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$ (3) Vậy sau 20 tháng anh Giàu nhận được tổng số tiền $5(1+0,65\%).\dfrac{(1+0,65\%)^n - 1}{0,65\%}$ triệu	**0,5** **0,5** **1,0**

3	Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt phẳng (SAB), (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông cân tại B, $SB = a$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng α. a) Tính theo a và α thể tích khối chóp $G.ANC$ với G là trọng tâm tam giác SBC, N là trung điểm BC. b) Gọi M là trung điểm AC. Tìm giá trị của α để khoảng cách giữa hai đường thẳng MN, SC đạt giá trị lớn nhất.  	**5,0**
3a (3,0đ)	Dễ thấy, $SA \perp mp(ABC),\ \alpha = \widehat{SBA}$ và $d(G,(ABC)) = \frac{1}{3}d(S,(ABC))$	**1,0**
	$S_{ANC} = \frac{1}{2}S_{ABC}, SA = a\sin\alpha, AB = a\cos\alpha.$	**1,0**
	Do đó $V_{S.ANC} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}SA\right)\left(\frac{1}{2}S_{ABC}\right) = \frac{1}{18}a\sin\alpha.\frac{(a\cos\alpha)^2}{2} = \frac{a^3\sin\alpha\cos^2\alpha}{36}.$	**1,0**
3b (2,0)	Vẽ hình vuông $ABCD$, mp(SCD) chứa SC và song song với MN nên $d(MN,SC) = d(MN,(SCD)) = d(M,(SCD)) = \frac{1}{2}d(A,(SCD)) = \frac{1}{2}AH.$	**1,0**
	Tam giác SAD có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{a^2\sin^2 2\alpha} \Rightarrow AH = \frac{a}{2}\sin 2\alpha \le \frac{a}{2}.$ Do đó khoảng cách cần xét lớn nhất khi $\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$	**1,0**
Câu 4	Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn chia hết cho 15.	**3,0 điểm**

	+ Gọi $x=\overline{abcd}$ + Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=A_9^4$. + x chia hết cho 15 $\Leftrightarrow x\vdots 3$ và $x\vdots 5$. Suy ra $x=\overline{abc5}$.	0,5
	Suy ra x chia hết 15 khi $a+b+c$ chia 3 dư 1. + Ta tìm tất cả các số có 3 chữ số khác nhau $\overline{abc}$ mà $a+b+c$ chia 3 dư 1. Xét 3 tập $A=\{1;4;7\},B=\{2;8\},C=\{3;6;9\}$	0,5
	Th1: 1 số thuộc tập A , 2 số thuộc tập C. Có C_3^1 cách chọn một số thuộc tập A , C_3^2 cách chọn hai số thuộc tập C. Ta có $C_3^1.C_3^2.3!$ số .	0,5
	Th2: 2 số thuộc tập A , 1 số thuộc tập B. Có C_3^2 cách chọn hai số thuộc tập A, 2 cách chọn hai số thuộc tập B.Ta có $2.C_3^2.3!$ số	0,5
	Th 3: 2 số thuộc tập B , 1 số thuộc tập C. Có 1 cách chọn hai số thuộc tập B , C_3^1 cách chọn hai số thuộc tập C. Ta có $C_3^1.3!$ số .	0,5
	Gọi D là biến cố “ Chọn được số chia hết cho 15”. $n(D)=C_3^1.C_3^1.3!\ +\ 2.C_3^2.3!\ +\ C_3^1.3!$. $P(D)=\dfrac{C_3^1.C_3^1.3!\ +\ 2.C_3^2.3!\ +\ C_3^1.3!}{A_9^4}=\dfrac{1}{28}$.	0,5
Câu 5	Cho hàm số $f(x)=2019^x-2019^{-x}$. Các số thực a,b thỏa mãn $a+b>0$ $f(a^2+b^2+ab+2)+f(-9a-9b)=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{4a+3b+1}{a+b+10}$ khi a,b thay đổi.	**(2,0đ)**
	Ta có $f'(x)=2019^x.\ln(2019)+2019^{-x}.\ln(2019)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ Lại có $f(-x)=2019^{-x}-2019^x=-f(x)$. Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.	0,5
	$f(a^2+b^2+ab+2)+f(-9a-9b)=0\Leftrightarrow f(a^2+b^2+ab+2)=-f(-9a-9b)=f(9a+9b)$ $\Leftrightarrow a^2+b^2+ab+2=9a+9b \Leftrightarrow a^2+b^2+ab+2-9a-9b=0$ $\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+4ab+8-36a-36b=0$ $\Leftrightarrow (2a+b)^2-18(2a+b)+3(b-3)^2-19=0$. $\Leftrightarrow (2a+b)^2-18(2a+b)-19=-3(b-3)^2\le 0$ …………………………………….. $\Rightarrow (2a+b)^2-18(2a+b)-19\le 0$ $\Rightarrow -1\le 2a+b\le 19\Rightarrow 2a+b\le 19\Leftrightarrow 2a+b-19\le 0$. Mặt khác $P-2=\dfrac{2a+b-19}{a+b+10}\le 0\Rightarrow P\le 2$ Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}2a+b=19\\a-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=8\\b=3\end{cases}$ …………………………………………………………	0,5 0,5 0,5

Chú ý:

1. Mọi lời giải đúng, khác với hướng dẫn chấm, đều cho điểm tối đa theo từng câu và từng phần tương ứng.

2. Tổ chấm thảo luận để thống nhất các tình huống làm bài có thể xảy ra của học sinh.