SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HƯNG YÊN **ĐỀ CHÍNH THỨC**	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH NĂM HỌC 2017 - 2018 Môn thi: TOÁN *Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề*

Câu I (5,0 *điểm*)

1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của nó và đường thẳng $y=2x+1$.

2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+(m+1)x-4$, m là tham số. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị và khoảng cách từ điểm $A\left(\dfrac{7}{2};1\right)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đó lớn nhất.

Câu II (4,0 *điểm*)

1. Tìm nghiệm dương của phương trình $4^x-2x-1=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{(3x+1)\log_4(3x+1)}{x}$.

2. Giải phương trình $2\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)+\sin x\right]=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\sin^2 x$.

Câu III (4,0 *điểm*)

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác cân tại S và vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

2. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và CC'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và AN theo a.

Câu IV (3,0 *điểm*) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}3x^2-2y^2-xy+12x-17y-15=0\\ \sqrt{2-x}+\sqrt{6-x-x^2}=y+\sqrt{2y+5}-\sqrt{y+4}.\end{cases}$$

Câu V (2,0 *điểm*) Cho tam giác ABC nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\left(\cos A+\sqrt{\cos^2 A+2}\right)\left(\cos B+\sqrt{\cos^2 B+2}\right)\left(\cos C+\sqrt{\cos^2 C+2}\right).$$

Câu VI (2,0 *điểm*) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\\ x_n+\dfrac{x_{n-1}^2}{2}=\dfrac{1}{2}, \forall n\ge 2.\end{cases}$

1. Chứng minh rằng $-\dfrac{1}{8}\le x_n\le\dfrac{1}{2}$ với mọi $n\ge 1$.

2. Tìm giới hạn của dãy số (x_n) khi $n\to+\infty$.

----------------- Hết -----------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: .... *Số báo danh:* ....
Chữ kí của cán bộ coi thi: ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

(*Hướng dẫn chấm gồm 6 trang*)

HƯỚNG DẪN CHẤM
KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2017 - 2018
Môn: TOÁN

I. Hướng dẫn chung

1) Hướng dẫn chấm thi này chỉ trình bày các bước chính của lời giải hoặc nêu kết quả. Trong bài làm, thí sinh phải trình bày lập luận đầy đủ.

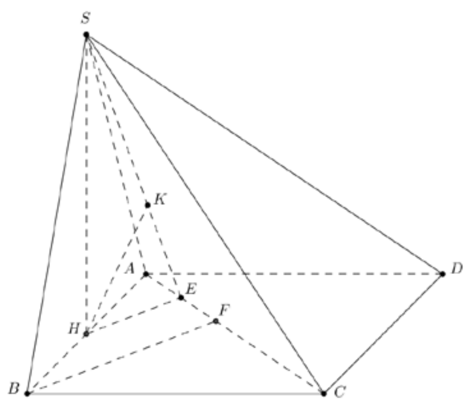
2) Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

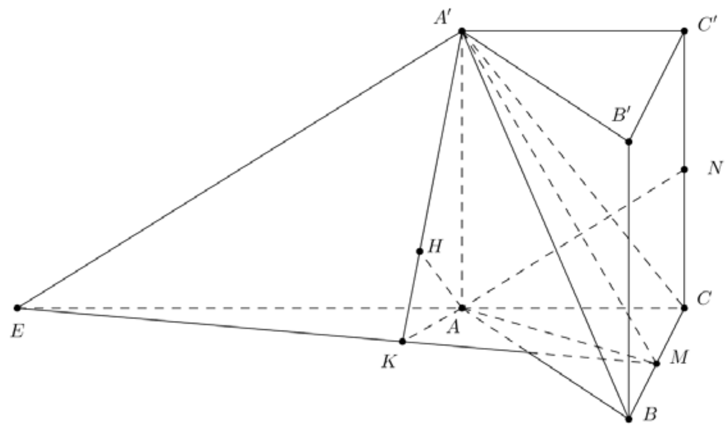
3) Việc chi tiết hoá thang điểm (nếu có) so với thang điểm trong hướng dẫn phải đảm bảo không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong tổ chấm thi. Các điểm thành phần và điểm cộng toàn bài giữ nguyên không làm tròn.

II. Đáp án và thang điểm

Câu	Đáp án	Điểm
Câu I.1 **2,0 *điểm***	**1.** Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $y=2x+1$.	
	Xét hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. Với $\forall x\neq 1$, ta có $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$	0,25
	Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng: $\dfrac{2x-1}{x-1}=2x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\2x^2-3x=0\end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$	0,25
	Với $x=0$ tọa độ giao điểm $A(0;1)$ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(0;1)$ là: $y=-x+1$	0,5
	Với $x=\dfrac{3}{2}$ tọa độ giao điểm $B\left(\dfrac{3}{2};4\right)$ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $B\left(\dfrac{3}{2};4\right)$ là: $y=-4x+10$	0,5
Câu I.2 **3,0 *điểm***	**2.** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+(m+1)x-4$, m là tham số. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị và khoảng cách từ điểm $A\left(\dfrac{7}{2};1\right)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đó lớn nhất.	
	Với $\forall x\in\mathbb{R}$, ta có $y'=3x^2-6x+m+1$	0,25
	Điều kiện để hàm số có hai cực trị là phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $3x^2-6x+m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt	0,25
	$\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow m<2$	0,5

	Khi đó, ta có $y = y'.\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + \frac{2m-4}{3}x + \frac{m-11}{3}$ Phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $$y = \frac{2m-4}{3}x + \frac{m-11}{3}\ (d).$$	0,5
	Đường thẳng (d) đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};-3\right)$ với mọi m. Ta có: $\overrightarrow{AM}(-4;-4)$, đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}\left(1;\frac{2m-4}{3}\right)$	0,5
	Dựng $AH \perp d$ suy ra $d(A;d) = AH \le AM$ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv M \Leftrightarrow AM \perp d$	0,5
	$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$ Kết hợp điều kiện suy ra $m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.	0,5
Câu II.1 **2,0 *điểm***	**1.** Tìm nghiệm dương của phương trình $4^x - 2x - 1 = \frac{1}{2}\log_2\frac{(3x+1)\log_4(3x+1)}{x}$	
	Với $x > 0$, phương trình tương đương $4^x - 2x - 1 = \log_4(3x+1) + \log_4\left[\log_4(3x+1)\right] - \log_4 x$ $\Leftrightarrow 4^x + x + \log_4 x = 3x + 1 + \log_4(3x+1) + \log_4\left[\log_4(3x+1)\right]$	0,25
	Đặt $\log_4(3x+1) = y \Leftrightarrow 3x+1 = 4^y$ Phương trình trở thành: $\Leftrightarrow 4^x + x + \log_4 x = 4^y + y + \log_4 y \quad (1)$	0,25
	Xét hàm số $f(t) = 4^t + t + \log_4 t$ trên $(0;+\infty)$. Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.	0,25
	Phương trình $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$	0,25
	Trở lại phép đặt ta được: $4^x = 3x + 1 \Leftrightarrow 4^x - 3x - 1 = 0$	0,25
	Xét hàm số $g(x) = 4^x - 3x - 1$ trên $\mathbb{R}$. Chứng minh phương trình $g(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm trên $\mathbb{R}$.	0,25
	Có $g(0) = g(1) = 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 0; x = 1$.	0,25
	Kết hợp điều kiện, phương trình có nghiệm $x = 1$.	0,25
Câu II.2 **2,0 *điểm***	**2.** Giải phương trình $2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \sin x\right] = \frac{1}{2}\sin 2x + \sin^2 x$.	
	$2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \sin x\right] = \frac{1}{2}\sin 2x + \sin^2 x$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + 2\sqrt{2}\sin x = \sin x\cos x + \sin^2 x$	0,25
	$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos x + 2\sqrt{2}\sin x = \sin x\cos x + \sin^2 x$	0,25

	$\Leftrightarrow \cos 2x+\sin 2x+\sqrt{2}\left(\cos x+2\sin x\right)=\sin x\cos x+\sin^2 x$	0,25
	$\Leftrightarrow \cos^2 x+\sin x\cos x-2\sin^2 x+\sqrt{2}\left(\cos x+2\sin x\right)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos x+2\sin x\right)+\sqrt{2}\left(\cos x+2\sin x\right)=0$ $\Leftrightarrow \left(\cos x+2\sin x\right)\left(\cos x-\sin x+\sqrt{2}\right)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x+2\sin x=0 \quad (1)\\ \cos x-\sin x+\sqrt{2}=0 \ (2)\end{array}\right.$	0,25
	Giải (1): $\cot x=-2 \Leftrightarrow x=acr\cot\left(-2\right)+k\pi$	0,25
	Giải (2): $\sin x-\cos x=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi$	0,25
Câu III.1 **2,0 *điểm***	**1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=2a$. Mặt bên $\left(SAB\right)$ là tam giác cân tại S và vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $\left(SAC\right)$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.	
	Gọi H là trung điểm của AB suy ra $SH\perp AB$. Mà $\left(SAB\right)\perp\left(ABCD\right)$ nên $SH\perp\left(ABCD\right)$. $d\left(B;\left(SAC\right)\right)=2d\left(H;\left(SAC\right)\right)$ Suy ra $d\left(H;\left(SAC\right)\right)=\frac{a\sqrt{6}}{6}$ 	0,5
	Trong mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, dựng $HE\perp AC$ Chứng minh $\left(SHE\right)\perp\left(SAC\right)$	0,25
	Trong mặt phẳng $\left(SHE\right)$, dựng $HK\perp SE$ Suy ra $HK\perp\left(SAC\right)\Rightarrow HK=d\left(H;\left(SAC\right)\right)=\frac{a\sqrt{6}}{6}$	0,25
	Trong mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, dựng $BF\perp AC$. Tính $BF=\frac{2a}{\sqrt{5}}$. Suy ra $HE=\frac{1}{2}BF=\frac{a}{\sqrt{5}}$.	0,5
	Xét tam giác SHE có $\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{HK^2}-\frac{1}{HE^2}=\frac{1}{a^2}\Rightarrow SH=a$.	0,25
	Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{2a^3}{3}$.	0,25
	2. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung	

Câu III.2 **2,0 *điểm***	điểm của các cạnh BC và CC'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và AN theo a.	
		
	Trong mặt phẳng $(ACC'A')$, dựng $A'E$ song song với AN $(E \in AC)$ Khi đó, AN song song với mặt phẳng $(A'ME)$ suy ra $d(AN;A'M) = d(AN;(A'ME)) = d(A;(A'ME))$	0,5
	Trong mặt phẳng (ABC), dựng $AK \perp EM$ Chứng minh $(AA'K) \perp (A'ME)$. Trong mặt phẳng $(AA'K)$, dựng $AH \perp A'K$ Suy ra $AH \perp (A'ME) \Rightarrow d(A;(A'ME)) = AH$.	0,25
	Tính $ME = a\sqrt{31}$; $AK = \dfrac{2S_{AME}}{ME} = \dfrac{2a\sqrt{93}}{31}$	0,5
	Góc giữa $(A'BC)$ và mặt phẳng đáy là $\widehat{A'MA} = 60^0$ suy ra $AA' = AM.\tan 60^0 = 3a$	0,5
	Xét tam giác $AA'K$, có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AK^2} + \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{97}{36a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{6a\sqrt{97}}{97}$ Vậy $d(AN;A'M) = \dfrac{6a\sqrt{97}}{97}$.	0,25
Câu IV **3,0 *điểm***	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 - xy + 12x - 17y - 15 = 0 & (1) \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{6-x-x^2} = y + \sqrt{2y+5} - \sqrt{y+4} & (2) \end{cases}$	
	Điều kiện: $\begin{cases} -3 \le x \le 2 \\ y \ge -\dfrac{5}{2} \end{cases}$	0,25
	$(1) \Leftrightarrow (x-y-1)(3x+2y+15) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x-1 \\ 3x+2y+15 = 0 \end{array}\right.$	0,25
	TH $3x+2y+15=0$ Từ điều kiện, $3x+2y+15 \ge -9-5+15 > 0$ (loại)	0,5
	TH $y = x-1$, thay vào phương trình (2) ta được: $\sqrt{2-x} + \sqrt{6-x-x^2} = x-1+\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+3}$	0,25

	$\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}+\sqrt{(2-x)(3+x)}=x-1+\sqrt{2x+3}$ (ĐK: $-\frac{3}{2}\le x\le 2$)	
	Đặt $\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}=t\Rightarrow \sqrt{(2-x)(3+x)}=\frac{t^2-5}{2}$ Phương trình trở thành $t+\frac{t^2-5}{2}=\sqrt{2x+3}+\frac{(2x+3)-5}{2}$ (3)	0,5
	Xét hàm số $f(u)=u+\frac{u^2-5}{2}$ trên $(0;+\infty)$. Hàm số $f(u)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Phương trình $(3)\Leftrightarrow f(t)=f\left(\sqrt{2x+3}\right)\Leftrightarrow t=\sqrt{2x+3}$	0,25
	Trở lại phép đặt: $\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}=\sqrt{2x+3}$ $\Leftrightarrow \sqrt{6-x-x^2}=x-1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 2x^2-x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{41}}{4}$	0,25
	Với $x=\frac{1+\sqrt{41}}{4}\Rightarrow y=\frac{-3+\sqrt{41}}{4}$ (thỏa mãn). Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{1+\sqrt{41}}{4};\frac{-3+\sqrt{41}}{4}\right)$	0,25
Câu V **2,0 *điểm***	Cho tam giác ABC nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\left(\cos A+\sqrt{\cos^2 A+2}\right)\left(\cos B+\sqrt{\cos^2 B+2}\right)\left(\cos C+\sqrt{\cos^2 C+2}\right)$	
	Đặt $\cos A=x;\cos B=y,\cos C=z$. Ta có: $0<x,y,z<1$ Biểu thức trở thành: $T=\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2}\right)\left(z+\sqrt{z^2+2}\right)$	0,25
	Chứng minh: $x+y+z\le\frac{3}{2}$	0,5
	$T=\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2}\right)\left(z+\sqrt{z^2+2}\right)$ $\Leftrightarrow \ln T=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)+\ln\left(y+\sqrt{y^2+2}\right)+\ln\left(z+\sqrt{z^2+2}\right)$	0,25đ
	Ta chứng minh: $\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\le\frac{2}{3}x+\ln 2-\frac{1}{3}$ với $x\in(0;1)$. Tương tự: $\ln\left(y+\sqrt{y^2+2}\right)\le\frac{2}{3}y+\ln 2-\frac{1}{3}$ với $y\in(0;1)$. $\ln\left(z+\sqrt{z^2+2}\right)\le\frac{2}{3}z+\ln 2-\frac{1}{3}$ với $z\in(0;1)$.	0,5đ
	Suy ra $\ln T\le\frac{2}{3}(x+y+z)+3\ln 2-1\le 3\ln 2\Leftrightarrow T\le 8$.	0,25đ
	Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{2}\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}$. Vậy $maxT=8$ khi tam giác ABC đều.	0,25đ

Câu VI **2,0 *điểm***	Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_n + \dfrac{x_{n-1}^2}{2} = \dfrac{1}{2}, \forall n \geq 2 \end{cases}$.	
	1. Ta chứng minh quy nạp $-\dfrac{1}{8} \leq x_n \leq \dfrac{1}{2}$ với mọi $n \geq 1$.	0,5
	2. Xét x là nghiệm của phương trình $x + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{2}$ với $-\dfrac{1}{8} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$.	0,25
	Khi đó $x - x_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{x^2}{2}$ $x - x_n = -\dfrac{1}{2}\left(x^2 - x_{n-1}^2\right) = \dfrac{(-1)^n}{2^n} x^2 (x + x_1)(x + x_2)...(x + x_{n-1})$	0,5
	Ta có $x = \sqrt{2} - 1$, nên $\lvert x + x_n \rvert \leq \lvert x \rvert + \lvert x_n \rvert \leq \sqrt{2} - 1 + \dfrac{1}{2} < 1$ với mọi $n \geq 1$. Nên $\lvert x - x_n \rvert \leq \dfrac{1}{2^n}$ với mọi $n \geq 1$	0,5
	Có $\lim \dfrac{1}{2^n} = 0$ do đó $\lim x_n = x = \sqrt{2} - 1$.	0,25

---------------- Hết ----------------