

ĐỀ THI MÔN: TOÁN - THPT

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu cách đều đường thẳng $y = x - 1$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\cot x - 2}{-\cot x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 3. Giải phương trình: $8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \ln(n^2 + 2n)$, ($n \in \mathbb{N}^*$). Tính $\lim S_n$ biết $S_n = \left(\frac{1}{e}\right)^{u_1} + \left(\frac{1}{e}\right)^{u_2} + \dots + \left(\frac{1}{e}\right)^{u_n}$.

Câu 5. Giải phương trình: $\sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} + \sqrt{12-x-x^2} = x-1 + \sqrt{2x+5}$.

Câu 6. Một hộp có 50 quả cầu được đánh số từ 1 đến 50. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Tính xác suất để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số chia hết cho 8.

Câu 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $AA' = a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB . Gọi I là trung điểm của $A'C$, điểm S thỏa mãn $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{SI}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.AA'B'B$.

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm I của AG và cắt các đoạn AB , AC , AD tại các điểm khác A . Gọi h_A , h_B , h_C , h_D lần lượt là khoảng cách từ các điểm A , B , C , D đến mặt phẳng (P) . Chứng minh rằng: $\frac{h_A^2 + h_B^2 + h_D^2}{3} \geq h_C^2$.

Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A . Điểm D là chân đường phân giác trong góc A . Gọi M , N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB , AC . Đường tròn (C) : $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ ngoại tiếp tam giác DMN . Gọi H là giao điểm của BN và CM , đường thẳng AH có phương trình $3x - y + 10 = 0$. Tìm tọa độ điểm B biết M có hoành độ dương, A có hoành độ nguyên.

Câu 10. Cho a , b , c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$ và $a^3b + b^3a + \frac{1}{ab} = ab + 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{3}{1+2c}$.

----- HẾT -----

<https://toanmath.com/>

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu cách đều đường thẳng $| = \{-4\}$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\cot x - 2}{-\cot x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 3. Giải phương trình: $\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sin x} + \frac{4}{\cos x} = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sin x} + \frac{4}{\cos x}$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \ln(n^2 + 2n)$, ($n \in \mathbb{N}^*$). Tính $\lim S_n$, biết

$$S_n = \left(\frac{1}{e}\right)^{u_1} + \left(\frac{1}{e}\right)^{u_2} + \dots + \left(\frac{1}{e}\right)^{u_n}.$$

Câu 5. Giải phương trình: $\sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} + \sqrt{12-x-x^2} = x-1 + \sqrt{2x+5}$.

Câu 6. Một hộp có 50 quả cầu được đánh số từ 1 đến 50. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Tính xác suất để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số chia hết cho 8.

Câu 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $AA' = a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB . Gọi I là trung điểm của $A'C$, điểm S thỏa mãn $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{SI}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.AA'B'B$.

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm I của AG và cắt các đoạn AB, AC, AD tại các điểm khác A . Gọi h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là khoảng cách từ các điểm A, B, C, D đến mặt phẳng (P) . Chứng minh rằng: $\frac{h_B^2 + h_C^2 + h_D^2}{3} \geq h_A^2$

Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A . Điểm D là chân đường phân giác trong góc A . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB, AC . Đường tròn (C) : $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ ngoại tiếp tam giác DMN . Gọi H là giao điểm của BN và CM , đường thẳng AH có phương trình $3x - y + 10 = 0$. Tìm tọa độ điểm B biết M có hoành độ dương, A có hoành độ nguyên.

Câu 10. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$ và $a^3b + b^3a + \frac{1}{ab} = ab + 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{3}{1+2c}$.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

I. LUU Ý CHUNG:

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải bao gồm các ý bắt buộc phải có trong bài làm của học sinh. Khi chấm nếu học sinh bỏ qua bước nào thì không cho điểm bước đó.
- Nếu học sinh làm theo cách khác, giám khảo căn cứ các ý trong hướng dẫn chấm để cho điểm.
- Trong bài làm, nếu ở một bước nào đó bị sai thì các phần sau có sử dụng kết quả sai đó sẽ không được điểm.
- Trong lời giải câu 7, 8 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì không cho điểm.
- Điểm toàn bài tính đến 0,5 và không làm tròn.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Nội dung
1	<p>Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu cách đều đường thẳng $= \{-4\}$.</p> <p>Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$.</p> <p>Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$ (*)</p> <p>Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - \left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$</p> <p>Ta có: $y_1 = y(x_1) = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_1 + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$; $y_2 = y(x_2) = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_2 + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$</p> <p>$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $\Delta: y = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$</p> <p>Các điểm cực trị cách đều đường thẳng $= \{-4\}$ khi và chỉ khi</p> <p>TH1: Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị song song hoặc trùng với đường thẳng $= \{-4\}$</p> $\Leftrightarrow -\left(\frac{2m}{3} + 2\right) = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{2}$ (loại) <p>TH2: Trung điểm I của AB nằm trên đường thẳng $= \{-4\}$</p> $\Leftrightarrow y_I = x_I - 1 \Leftrightarrow \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} - 1 \Leftrightarrow -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)(x_1 + x_2) + 2\left(2 - \frac{m}{3}\right) = (x_1 + x_2) - 2$ $\Leftrightarrow -\left(\frac{2m}{3} + 2\right).2 + 2\left(2 - \frac{m}{3}\right) = 2 - 2 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn (*)) <p>Vậy giá trị của m cần tìm là: $m = 0$.</p>
2	<p>Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\cot x - 2}{-\cot x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.</p> <p>Ta có $y' = \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}(m-2)}{(-\cot x + m)^2}$</p> <p>Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$ hàm số đó xác định và $y' > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} m \notin (1; +\infty) \\ m-2 < 0 \end{cases}$</p>

$\Leftrightarrow m \leq 1$. Vậy $m \leq 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{4})$.

$$\text{Giải phương trình: } ; \text{vì} \{ = \frac{\sqrt{6}}{\text{frv}\{}} + \frac{4}{\text{vlq}\{}}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) \quad (*)$$

Với điều kiện (*), phương trình đã cho $\Leftrightarrow 8\sin^2 x \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x$

$$\Leftrightarrow (4 - 4\cos 2x)\cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x \Leftrightarrow 4\cos x - 4\cos 2x \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow 3\cos x - 2\cos x - 2\cos 3x = \sqrt{3} \sin x \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2\cos 3x$$

3 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos 3x \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = -x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn (*))}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \ln(n^2 + 2n)$, ($n \in \mathbb{N}^*$). Tính $\lim S_n$, biết

$$S_n = \left(\frac{1}{e}\right)^{u_1} + \left(\frac{1}{e}\right)^{u_2} + \dots + \left(\frac{1}{e}\right)^{u_n}.$$

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{e}\right)^{u_n} = \frac{1}{e^{\ln(n^2+2n)}} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$\text{Suy ra } S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

4 $= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$$\text{Vậy, } \lim S_n = \frac{1}{2}\lim\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Giải phương trình: $\sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} + \sqrt{12-x-x^2} = x-1+\sqrt{2x+5}$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq 3 \\ 2x+5 \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $t = \sqrt{x+4} + \sqrt{3-x}$ ($t > 0$)

5 $\Rightarrow t^2 = 7 + 2\sqrt{12-x-x^2}$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } t + \frac{t^2 - 7}{2} = x-1+\sqrt{2x+5} \Leftrightarrow t^2 + 2t = 2x+5 + 2\sqrt{2x+5} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(u) = u^2 + 2u$ với $u \geq 0$

Ta có: $f'(u) = 2u + 2 > 0$, ($\forall u \geq 0$) \Rightarrow Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow t = \sqrt{2x+5}$

hay $\sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} = \sqrt{2x+5}$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow 7 + 2\sqrt{12 - x - x^2} = 2x + 5 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{12 - x - x^2} = x - 1 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 12 - x - x^2 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{89}}{4} \text{ (thỏa mãn (*))}
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{1 + \sqrt{89}}{4}$.

Một hộp có 50 quả cầu được đánh số từ 1 đến 50. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Tính xác suất để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số chia hết cho 8.

Có C_{50}^3 cách lấy ra 3 quả cầu từ 50 quả cầu đã cho

Chia 50 quả cầu trong hộp thành 4 nhóm:

Nhóm 1: gồm 25 quả cầu mang số lẻ

Nhóm 2: gồm 13 quả cầu mang số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4

Nhóm 3: gồm 6 quả cầu mang số chia hết cho 4 mà không chia hết cho 8

Nhóm 4: gồm 6 quả cầu mang số chia hết cho 8.

Để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số không chia hết cho 8 thì có 4 trường hợp sau xảy ra:

TH1) 1 quả thuộc nhóm 1 và 2 quả thuộc nhóm 2: có $C_{25}^1 \cdot C_{13}^2$ cách lấy

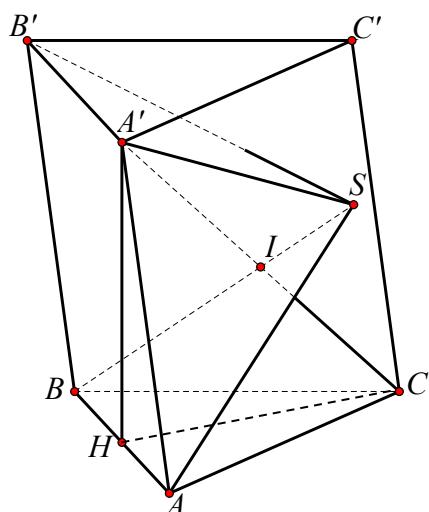
TH2) 2 quả thuộc nhóm 1 và 1 quả thuộc nhóm 2: có $C_{25}^2 \cdot C_{13}^1$ cách lấy

TH3) 2 quả thuộc nhóm 1 và 1 quả thuộc nhóm 3: có $C_{25}^2 \cdot C_6^1$ cách lấy

TH4) 3 quả thuộc nhóm 1: có C_{25}^3 cách lấy

$$\text{Vậy xác suất cần tính là: } P = 1 - \frac{C_{25}^1 \cdot C_{13}^2 + C_{25}^2 \cdot C_{13}^1 + C_{25}^2 \cdot C_6^1 + C_{25}^3}{C_{50}^3} = \frac{193}{392}$$

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $AA' = a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB . Gọi I là trung điểm của $A'C$, điểm S thỏa mãn $\overline{IB} = 2\overline{SI}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.AA'B'B$.



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow A'H \perp (ABC) \Rightarrow CH \perp (AA'B'B)$

$$\text{Ta có: } CH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{C.AA'B'B} = \frac{1}{3} CH \cdot S_{AA'B'A} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$$

6

7

Do $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{SI} \Rightarrow d(S, (AA'B'B)) = \frac{3}{2}d(I, (AA'B'B)) = \frac{3}{4}d(C, (AA'B'B))$

Suy ra $V_{S.AA'B'B} = \frac{3}{4}V_{C.AA'B'B} = \frac{3a^3}{16}$.

Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm I của AG và cắt các đoạn AB, AC, AD tại các điểm khác A . Gọi h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là khoảng cách từ các điểm A, B, C, D đến mặt phẳng (P) . Chứng minh rằng:

$$\frac{h_B^2 + h_C^2 + h_D^2}{3} \geq h_A^2.$$

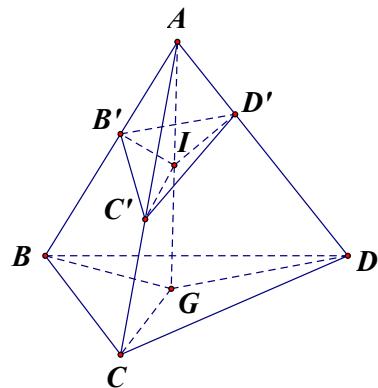
Gọi B', C', D' là giao điểm của (P) với AB, AC, AD

Ta có: $V_{A.B'C'D'} = V_{A.C'D'I} + V_{A.B'C'I} + V_{A.B'D'I}$;

$$S_{\Delta GBC} = S_{\Delta GCD} = S_{\Delta GBD} = \frac{1}{3}S_{\Delta BCD}$$

$$\frac{V_{A.B'C'I}}{V_{A.BCG}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC} \cdot \frac{AI}{AG} \Leftrightarrow \frac{3V_{A.B'C'I}}{V_{A.BCD}} = \frac{1}{2} \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC}$$

$$\frac{3V_{A.B'D'I}}{V_{A.BCD}} = \frac{1}{2} \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AD'}{AD}; \frac{3V_{A.C'D'I}}{V_{A.BCD}} = \frac{1}{2} \frac{AC'}{AC} \cdot \frac{AD'}{AD}$$



Suy ra: $\frac{3V_{A.B'C'D'}}{V_{A.BCD}} = \frac{1}{2} \left(\frac{AB' \cdot AC'}{AB \cdot AC} + \frac{AC' \cdot AD'}{AC \cdot AD} + \frac{AB' \cdot AD'}{AB \cdot AD} \right)$

$$\frac{3AB' \cdot AC' \cdot AD'}{AB \cdot AC \cdot AD} = \frac{1}{2} \left(\frac{AB' \cdot AC'}{AB \cdot AC} + \frac{AC' \cdot AD'}{AC \cdot AD} + \frac{AB' \cdot AD'}{AB \cdot AD} \right) \Leftrightarrow \frac{DD'}{AD'} + \frac{BB'}{AB'} + \frac{CC'}{AC'} = 3$$

Mặt khác ta có: $\frac{BB'}{AB'} = \frac{h_B}{h_A}, \frac{CC'}{AC'} = \frac{h_C}{h_A}, \frac{DD'}{AD'} = \frac{h_D}{h_A} \Rightarrow h_D + h_C + h_B = 3h_A$

Hơn nữa: $(h_D + h_C + h_B)^2 \leq 3(h_D^2 + h_C^2 + h_B^2) \Leftrightarrow \frac{h_B^2 + h_C^2 + h_D^2}{3} \geq h_A^2$ (đpcm)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A . Điểm D là chân đường phân giác trong góc A . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB, AC . Đường tròn (C) : $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ ngoại tiếp tam giác DMN . Gọi H là giao điểm của BN và CM , đường thẳng AH có phương trình $3x - y + 10 = 0$. Tìm tọa độ điểm B biết M có hoành độ dương, A có hoành độ nguyên.

Vì $AMDN$ là hình vuông nên $A \in (C)$.

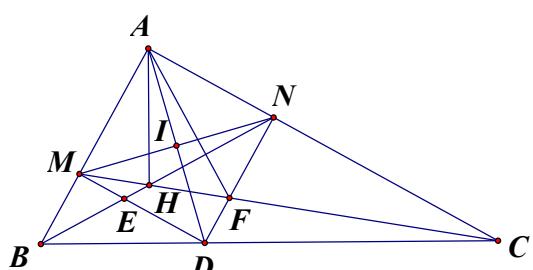
Tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y + 10 = 0 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 10 \\ x = -2 \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{19}{5} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 4)$$

Đường tròn (C) có tâm $I(-2; 1)$, $AMDN$ là hình vuông nên I là trung điểm $AD \Rightarrow D(-2; -2)$.

Gọi E là giao điểm của BN và DM ; F là giao điểm của DN và CM .



Ta có $AMDN$ là hình vuông nên

$$\frac{MF}{MC} = \frac{AN}{AC} = \frac{MD}{AC} = \frac{ME}{AN} = \frac{ME}{MD} \Rightarrow EF // CD \Rightarrow EF // BC$$

$$\frac{NF}{AN} = \frac{NF}{AM} = \frac{ND}{AB} = \frac{AN}{AB} \Rightarrow \Delta ANF \text{ và } \Delta BAN \text{ đồng dạng}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{NAF} \Rightarrow BN \perp AF$$

Tương tự $CM \perp AE \Rightarrow H$ là trực tâm $\Delta AEF \Rightarrow AH \perp EF \Rightarrow AH \perp BC$.

Đường thẳng BC vuông góc AH , qua D nên có phương trình $x + 3y + 8 = 0$.

Đường thẳng MN vuông góc AD , qua I nên có phương trình: $y - 1 = 0$

Tọa độ của M, N là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vì M có hoành độ dương nên $M(1; 1)$.

Đường thẳng AB qua A, M nên có phương trình: $x + y - 2 = 0$

Do $B = AB \cap BC$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow B(7; -5)$$

Vậy $B(7; -5)$.

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$ và $a^3b + b^3a + \frac{1}{ab} = ab + 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{3}{1+2c}$.

Theo BĐT Cô-si ta có: $a^3b + ab^3 \geq 2a^2b^2 \Rightarrow ab + 2 \geq 2a^2b^2 + \frac{1}{ab}$

Đặt $t = ab (t > 0) \Rightarrow t + 2 \geq 2t^2 + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - 2t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

Với $a, b > 0; ab \leq 1$ ta chứng minh $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}$ (*)

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy: } (*) &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab}\right) + \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab}\right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a(b-a)}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{b(a-b)}{(1+b^2)(1+ab)} \leq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(ab-1) \leq 0 \text{ (đúng)} \\ &\Rightarrow P \leq \frac{2}{1+ab} - \frac{3}{1+\frac{2}{ab}} = \frac{2}{1+t} - \frac{3t}{t+2}. \end{aligned}$$

Xét $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; $f(t) = \frac{2}{1+t} - \frac{3t}{t+2}$; $f'(t) = -\frac{2}{(1+t)^2} - \frac{6}{(t+2)^2} < 0$

Từ đó $f(t)$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow \underset{\left[\frac{1}{2}; 1\right]}{\text{Max}} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{15}$

Dấu "=" xảy ra khi $t = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}; b = \frac{1}{\sqrt{2}}; c = 2$.

10

-----Hết-----