ĐỀ VÀ HDG HỌC SINH GIỎI 12 VĨNH PHÚC 2018-2019

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 - 14x^2 + 20x + 4$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: y = -4x + 15$.

Câu 2. Giải phương trình $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) + \sin x = \sin 2x$

Câu 3. Tìm tất cả các giái trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}(m+1)x^2 + 3mx - m^2$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 + m - 2\right|$ có đúng năm điểm cực trị.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \ln\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Tính giá trị của biểu thức $H = 2019.e^{u_1}.e^{u_2}...e^{u_{2018}}$

Câu 6: Xếp mười học sinh gồm bốn học sinh lớp 12, ba học sinh lớp 11 và ba học sinh lớp 10 ngồi vào một hàng ngang gồm 10 ghế được đánh số từ 1 đến 10. Tính xác suất để không có hai học sinh lớp 12 ngồi cạnh nhau.

Câu 7: Cho hai đường thẳng Ax, By chéo nhau, vuông góc và nhận đoạn AB làm đoạn vuông góc chung. Hai điểm M, N lần lượt di động trên Ax, By sao cho $AM + BN = MN$. Gọi O là trung điển của đoạn AB. Chứng minh tam giác OMN là tam giác tù và khoảng cách từ O đến đường thẳng MN không đổi khi M, N khi di động trên Ax, By.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BD, BC, AC sao cho $BD = 2BM, BC = 4BN, AC = 3AP$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Tính tỷ số thể tích hai phần của khối tứ diện $ABCD$ được chia bởi (MNP).

Câu 9: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$, điểm $G(3;3)$ là trọng tâm tam giác ABD. Đường thẳng đi qua A vuông góc với BG và cắt BD tại điểm $E(1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết rằng đỉnh A có tung độ lớn hơn 1.

Câu 10: Cho các số thực x, y, z thuộc khoảng $(0;3)$ thỏa mãn $\left(\frac{2}{x} - 1\right)\left(\frac{3}{y} - 1\right)\left(\frac{4}{z} - 1\right) = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$.

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 - 14x^2 + 20x + 4$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta:\ y = -4x + 15$.

Lời giải

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 28x + 20$.

Gọi $M\left(a;\ a^4 - 14a^2 + 20a + 4\right)$ là điểm thuộc đồ thị (C) mà tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta:\ y = -4x + 15$. Khi đó ta có:

$$y'(a) = -4 \Leftrightarrow 4a^3 - 28a + 20 = -4 \Leftrightarrow (a-1)\left(a^2 + a - 6\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -3 \\ a = 2 \end{array}\right..$$

Với $a = 1$ ta có $M(1;\ 11) \in \Delta$ khi đó tiếp tuyến tại M chính là Δ nên loại.

Với $a = -3$ ta có $M(3;\ -101)$, phương trình tiếp tuyến tại M là:

$$y = -4(x+3) - 101 = -4x - 113.$$

Với $a = 2$ ta có $M(2;\ 4)$, phương trình tiếp tuyến tại M là:

$$y = -4(x-2) + 4 = -4x + 12.$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm lần lượt có phương trình là:

$$y = -4x - 113;\ \ y = -4x + 12.$$

Câu 2. Giải phương trình $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) + \sin x = \sin 2x$

Lời giải

Ta có

$$\begin{array}{l}
(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) + \sin x = \sin 2x \\
\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1) \\
\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = -\cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.
\end{array}$$

Câu 3. Tìm tất cả các giái trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}(m+1)x^2+3mx-m^2$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Lời giải

+Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

+ $y'=4x^2+3(m+1)x+3m$.Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0$ $\forall x\in(-1;+\infty)$ và phương trình $y'=0$ chỉ có một số hữu hạn nghiệm trên khoảng $(-1;+\infty)$

$\Leftrightarrow 4x^2+3(m+1)x+3m\ge 0\ \forall x\in(-1;+\infty)$ $\Leftrightarrow -3m\le\frac{4x^2+3x}{x+1}\ \forall x\in(-1;+\infty)$ (1).

+Xét hàm số $f(x)=\frac{4x^2+3x}{x+1}$ với $x\in(-1;+\infty)$.Ta có $f'(x)=\frac{4x^2+8x+3}{(x+1)^2}$ $\forall x\in(-1;+\infty)$;

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$.Do đó

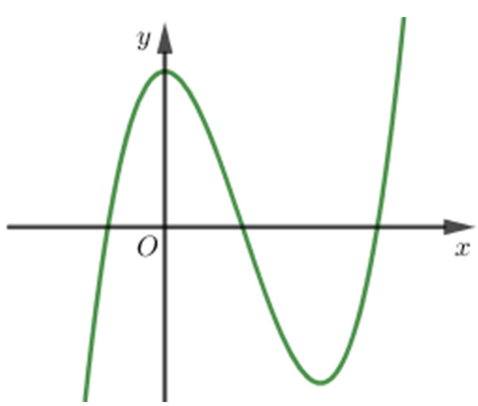
$\min\limits_{(-1;+\infty)}f(x)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$.

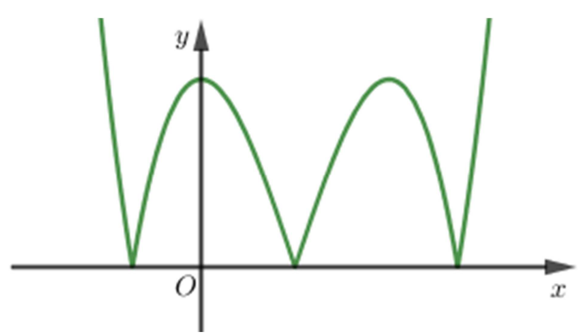
$+(1)\Leftrightarrow -3m\le\min\limits_{(-1;+\infty)}f(x)\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{3}$.Vậy đáp số cần tìm là $m\ge\frac{1}{3}$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m-2\right|$ có đúng năm điểm cực trị.

Lời giải

Hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m-2\right|$ có đúng năm điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=x^3-3x^2+m-2$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^3-3x^2+m-2=0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.





Ta có $(1)\Leftrightarrow x^3-3x^2=2-m$

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2$ ta có $f'\left(x\right)=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$-4<2-m<0 \Leftrightarrow 2<m<6$.

Câu 5. Cho dãy số $\left(u_n\right)$ có số hạng tổng quát $u_n=\ln\left[1-\dfrac{1}{\left(n+1\right)^2}\right]$, $\left(n\in \mathbb{N}^*\right)$. Tính giá trị của biểu thức $H=2019.e^{u_1}.e^{u_2}...e^{u_{2018}}$

Lời giải

Ta có $u_n=\ln\left[1-\dfrac{1}{\left(n+1\right)^2}\right]=\ln\dfrac{n\left(n+1\right)}{\left(n+1\right)^2}$.

Do đó $\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=\ln\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k\left(k+2\right)}{\left(k+1\right)^2}=\ln\dfrac{n!(n+2)!}{\left[(n+1)!\right]^2.2!}=\ln\dfrac{n+2}{2\left(n+1\right)}$.

Suy ra $H=2019.e^{u_1}.e^{u_2}...e^{u_{2018}}=2019.e^{\sum\limits_{k=1}^{2018}u_k}=2019.e^{\ln\frac{2018+2}{2(2018+1)}}=2019.\dfrac{2020}{2.2019}=1010$.

Câu 6: Xếp mười học sinh gồm bốn học sinh lớp 12, ba học sinh lớp 11 và ba học sinh lớp 10 ngồi vào một hàng ngang gồm 10 ghế được đánh số từ 1 đến 10. Tính xác suất để không có hai học sinh lớp 12 ngồi cạnh nhau.

Lời giải

+ Có $10!$ cách xếp bất kỳ 10 học sinh.

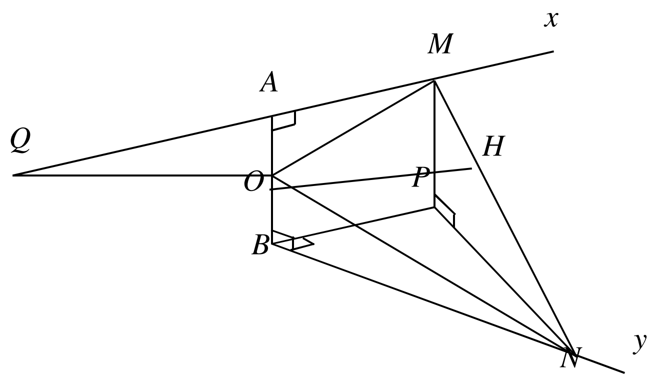
+ Có $6!$ cách xếp 6 học sinh lớp 11 và lớp 10; 6 học sinh đó tạo thành 7 chỗ trống (tính cả vị trí hai đầu). Chọn 4 vị trí và xếp 4 học sinh lớp 12 có A_7^4 cách.

Suy ra có $A_7^4.6!$ cách xếp 10 học sinh sao cho không có hai học sinh lớp 12 ngồi cạnh nhau.

Xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{A_7^4.6!}{10!}=\dfrac{1}{6}$.

Câu 7: Cho hai đường thẳng Ax, By chéo nhau, vuông góc và nhận đoạn AB làm đoạn vuông góc chung. Hai điểm M, N lần lượt di động trên Ax, By sao cho $AM+BN=MN$. Gọi O là trung điển của đoạn AB. Chứng minh tam giác OMN là tam giác tù và khoảng cách từ O đến đường thẳng MN không đổi khi M, N khi di động trên Ax, By.

Lời giải



Dựng hình bình hành $ABPM$. Ta có

$\left(\widehat{BP;BN}\right)=\left(\widehat{AM;BN}\right)=90^\circ$.

$AB\perp\left(PBN\right)\Rightarrow MP\perp PN$.

Suy ra

$$\begin{cases} MN^2=MP^2+PN^2=MP^2+BP^2+BN^2=AB^2+AM^2+BN^2 \\ MN^2=\left(AM+BN\right)^2 \end{cases}\Rightarrow AM.BN=\frac{AB^2}{2}.$$

Xét tam giác OMN . Ta có

$$\cos\widehat{MON}=\frac{OM^2+ON^2-MN^2}{2OM.ON}=\frac{OA^2+AM^2+OB^2+BN^2-\left(AM+BN\right)^2}{2OM.ON}$$

$$=\frac{\frac{AB^2}{2}-2AM.BN}{2OM.ON}=-\frac{AB^2}{4OM.ON}<0$$

Như vậy tam giác OMN là tam giác tù.

Lấy điểm Q trên tia đối của tia Ax sao cho $AQ=BN$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng MN . Ta có

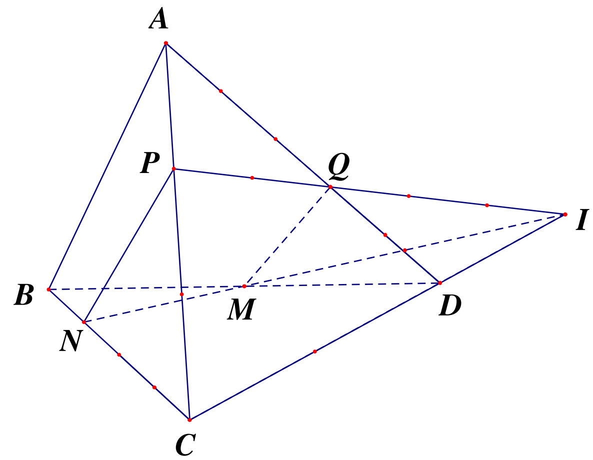
$\Delta OAQ=\Delta OBN\ \left(c.g.c\right)\Rightarrow OQ=ON$.

$\Delta OMQ=\Delta OMN\ \left(c.c.c\right)\Rightarrow OA=OH$.

Như vậy $d\left(O;MN\right)=OH=\frac{AB}{2}$ không đổi.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M,N,P lần lượt thuộc các cạnh BD,BC,AC sao cho $BD=2BM$, $BC=4BN$, $AC=3AP$. Mặt phẳng $\left(MNP\right)$ cắt AD tại Q. Tính tỷ số thể tích hai phần của khối tứ diện $ABCD$ được chia bởi $\left(MNP\right)$.

Lời giải



Trong (BCD), gọi $I = MN \cap CD$. Khi đó $Q = IP \cap AD$ chính là giao điểm của (MNP) và AD.

Kết hợp giả thiết và áp dụng định lí Mê-nê-la-uýt trong các tam giác sau ta có:

- Với $\Delta BCD: \frac{NB}{NC}.\frac{IC}{ID}.\frac{MD}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{IC}{ID} = 3$.

- Với $\Delta ACD: \frac{PA}{PC}.\frac{IC}{ID}.\frac{QD}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{QD}{QA} = \frac{2}{3}$.

- Với $\Delta ICN: \frac{DC}{DI}.\frac{MI}{MN}.\frac{BN}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{MI}{MN} = 2$.

- Với $\Delta IPC: \frac{DC}{DI}.\frac{QI}{QP}.\frac{AP}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{QI}{QP} = \frac{3}{2}$.

Áp dụng công thức tỉ số thể tích ta có:

$$\frac{V_{IMQD}}{V_{INPC}} = \frac{IQ}{IP}.\frac{IM}{IN}.\frac{ID}{IC} = \frac{3}{5}.\frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{2}{15} \quad (1)$$

$$\frac{V_{INPC}}{V_{ABCI}} = \frac{CN}{CP}.\frac{CP}{CA} = \frac{3}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{2} \quad (2); \quad \frac{V_{ABCI}}{V_{ABCD}} = \frac{CI}{CD} = \frac{3}{2} \quad (3)$$

Từ $(1),(2)$ và (3) $\Rightarrow \frac{V_{INPC}}{V_{ABCD}} = \frac{3}{4}, \frac{V_{IMQD}}{V_{ABCD}} = \frac{3}{4}.\frac{2}{15} = \frac{1}{10}$.

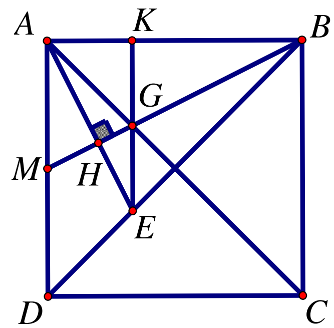
$$\Rightarrow \frac{V_{CDMNPQ}}{V_{ABCD}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{10} = \frac{13}{20}, \frac{V_{ABMNPQ}}{V_{ABCD}} = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}.$$

Do vậy ta có: $\frac{V_{ABMNPQ}}{V_{CDMNPQ}} = \frac{7}{13}$.

Câu 9: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$, điểm $G(3;3)$ là trọng tâm tam giác ABD. Đường thẳng đi qua A vuông góc với BG và cắt BD tại điểm $E(1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết rằng đỉnh A có tung độ lớn hơn 1.

Lời giải

Cách 1:



Gọi M là trung điểm của cạnh AD, $H = AE \cap BM$, $K = GE \cap AB$.

Vì $AG \perp BE$ và $BG \perp AE$ nên G là trực tâm tam giác $ABE \Rightarrow GE \perp AB$, $GE//AD$.

Có $\dfrac{KG}{AM} = \dfrac{BG}{BM}$ và $\dfrac{GE}{MD} = \dfrac{BG}{BM} \Rightarrow \dfrac{KG}{AM} = \dfrac{GE}{MD}$ mà $AM = MD \Rightarrow KG = GE \Rightarrow G$ là trung điểm của $KE \Rightarrow \begin{cases} x_K = 2x_G - x_E \\ y_K = 2.y_G - y_E \end{cases} \Rightarrow K(5;3)$.

AB đi qua $K(5;3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{EG} = (2;0) \Rightarrow AB: x - 5 = 0$.

Vì $A \in AB \Rightarrow A(5;a)$ với $a > 1$. Vì $\widehat{KAG} = 45° \Rightarrow \Delta AKG$ vuông cân nên $KA = KG$

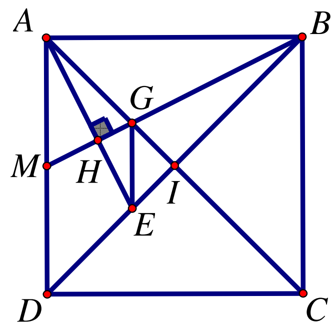
$\Rightarrow (a-3)^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = 1 \end{array}\right.$. Vì $a > 1 \Rightarrow A(5;5)$.

Ta có: $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} \Rightarrow \begin{cases} x_C - 5 = -6 \\ y_C - 5 = -6 \end{cases} \Rightarrow C(-1;-1)$.

Có $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{GE} \Rightarrow \begin{cases} x_D - 5 = -6 \\ y_D - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(-1;5)$.

Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} x_B - 5 = 0 \\ y_B - 5 = -6 \end{cases} \Rightarrow B(5;-1)$.

Cách 2:



Gọi M là trung điểm của cạnh AD, $H = AE \cap BM$, I là tâm của hình vuông $ABCD$ và $AB = a$. Ta có: $BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ mà $BG = \dfrac{2}{3}BM \Rightarrow BG = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Xét tam giác ABM ta có: $BH.BM = AB^2 \Rightarrow BH = \dfrac{AB^2}{BM} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$.

Vì $\Delta BHE \# \Delta BIG \Rightarrow \dfrac{BH}{BI} = \dfrac{BE}{BG} \Rightarrow BE = \dfrac{BH.BG}{BI} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a \Rightarrow EI = BE - BI = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a - \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{6}a$. Xét tam giác IGE có: $GE = \sqrt{GI^2 + EI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{6}.a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{6}.a\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{a}{3}$.

Mà $G(3;3)$ và $E(1;3)$ nên $GE = 2$. Do đó $\dfrac{a}{3} = 2 \Rightarrow a = 6$.

Xét tam giác ABE có: $AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB.BE.\cos 45°$

$= a^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a\right)^2 - 2.a.\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5a^2}{9} \Rightarrow AE = \dfrac{a\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5}$.

Gọi $A(x;y)$ với $y > 1$.

Ta có: $\begin{cases} AG = \dfrac{a\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2} \\ AE = 2\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-x)^2 + (3-y)^2 = 8 \\ (1-x)^2 + (3-y)^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow (1-x)^2 - (3-x)^2 = 12$

$\Rightarrow x = 5 \Rightarrow 4 + (3-y)^2 = 8 \Rightarrow (3-y)^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 5 \end{array}\right. \Rightarrow A(5;5)$.

Vì $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} \Rightarrow \begin{cases} x_C - 5 = -6 \\ y_C - 5 = -6 \end{cases} \Rightarrow C(-1;-1)$.

Có $EI = \dfrac{a\sqrt{2}}{6} = \dfrac{1}{3}DI$ mà $IG = \dfrac{1}{3}IA$ (tính chất trọng tâm) nên $GE // AD$ và $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{GE} \Rightarrow \begin{cases} x_D - 5 = -6 \\ y_D - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(-1;5)$.

Vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\begin{cases}x_B-5=0\\ y_B-5=-6\end{cases}\Rightarrow B\left(5;-1\right)$.

Câu 10: Cho các số thực x,y,z thuộc khoảng $\left(0;3\right)$ thỏa mãn $\left(\dfrac{2}{x}-1\right)\left(\dfrac{3}{y}-1\right)\left(\dfrac{4}{z}-1\right)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}\dfrac{x}{2}=a\\ \dfrac{y}{3}=b\\ \dfrac{z}{4}=c\\ a+b+c=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<a<\dfrac{3}{2}\\ 0<b<1\\ 0<c<\dfrac{3}{4}\\ 0<t<\dfrac{13}{4}\end{cases}$; Áp dụng BĐT

$$\left(a+b+c\right)^3\ge 27abc\Leftrightarrow abc\le\frac{\left(a+b+c\right)^3}{27}=\frac{t^3}{27}$$

Từ điều kiện ta có:

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)=1\Leftrightarrow\left(ab+bc+ca\right)=2abc+\left(a+b+c\right)-1$$
$$\Rightarrow ab+bc+ca\le\frac{2}{27}t^3+t-1\Rightarrow -2\left(ab+bc+ca\right)\ge\frac{-4}{27}t^3-2t+2.$$

Mà $P=\left(a+b+c\right)^2-2\left(ab+bc+ca\right)\ge-\dfrac{4}{27}t^3+t^2-2t+2$. Coi P là hàm số theo biến t

Thì $P'=\dfrac{-4}{9}t^2+2t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

BBT

x	0		$\frac{3}{2}$		3		$\frac{13}{4}$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	2		$\frac{3}{4}$		1		$\frac{211}{216}$

Vậy $\min P=\dfrac{3}{4}$ khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(x;y;z\right)=\left(1;\dfrac{3}{2};2\right)$.