GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 12 TỈNH ĐỒNG NAI NĂM 2018 – 2019

Câu 1. (5,0 điểm) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx + 8$, m là tham số.

a) Tìm m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm vế hai phía của trục tung.

c) Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;0]$ bằng -24

Giải

a) $y' = 6x^2 - 6(m+3)x + 18m$,

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \le 0 \Leftrightarrow 9(m+3)^2 - 108m \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 \le 0 \Leftrightarrow m = 3$.

b) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục tung $\Leftrightarrow m < 0$

c)

+ Nếu $m = 3 \Rightarrow y' = 6x^2 - 36x + 54 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên giá trị nhỏ nhất trên $[-1;0]$ là $y(0) \Leftrightarrow 8 = -24$ (vô lí)

+ Nếu $m = -1 \Rightarrow y' = 6x^2 - 12x - 18$ thì trên $(-1;0)$ hàm số nghịch biến nên giá trị nhỏ nhất trên $[-1;0]$ là $y(0) \Leftrightarrow 8 = -24$ (vô lí)

+ Nếu $m = 0 \Rightarrow y' = 6x^2 - 18x$ thì trên $(-1;0)$ hàm số đồng biến nên giá trị nhỏ nhất trên $[-1;0]$ là $y(-1) \Leftrightarrow -3 - 21m = -24 \Leftrightarrow m = 1$ (loại)

+ Nếu $m \ne 3,\ m \ne 0,\ m \ne -1$ thì $y' = 0$ luôn có hai nghiệm là m và 3. Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $m > 0$ thì trên $(-1;0)$ hàm số đồng biến nên giá trị nhỏ nhất trên $[-1;0]$ là $y(-1) = -24$ $\Leftrightarrow m = 1$ (nhận)
- Nếu $-1 < m < 0$ thì trên $(-1;m)$ hàm số đồng biến và trên $(m;0)$ hàm số nghịch biến nên giá trị nhỏ nhất trên $[-1;0]$ là $y(-1)$ hoặc $y(0)$, mà $y(0) = -24$ (vô lí) và $y(-1) = -24 \Leftrightarrow m = 1$ (loại)
- Nếu $m < -1$ thì trên $[-1;0]$ hàm số nghịch biến nên giá trị nhỏ nhất trên $[-1;0]$ là $y(-1)$ hoặc $y(0)$, mà $y(0) = -24$ (vô lí) và $y(-1) = -24 \Leftrightarrow m = 1$ (loại)

  Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm

Câu 2. (3,5 điểm)

1) Giải phương trình $8.25^x - 8.10^x - 15.2^{2x+1} = 0$.

2) Giải phương trình $(1 + 2\sin 4x)\tan 2x = 1$

Giải

1) $8.25^x - 8.10^x - 15.2^{2x+1} = 0 \Leftrightarrow 8.\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 8.\left(\frac{5}{2}\right)^x - 30 = 0 \left[\begin{array}{l} \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{5}{2} \\ \left(\frac{5}{2}\right)^x = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$

2) Điều kiện $x \ne \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

$(1 + 2\sin 4x)\tan 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x + 2\sin 4x.\sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x - \cos 6x = \cos 2x$

$$\sin 2x = \cos 6x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - 2x = 6x + k2\pi \\ \frac{\pi}{2} - 2x = -6x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \text{ (thỏa đk)}$$

Câu 3. (3,5 điểm) Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Tam giác BCD là tam giác đều, $AB = a,\ BC = 2a$.

1) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD)

2) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường AC và BD

Giải

1) Có $AB \perp (BCD)$ mà $AB \subset (ABC) \Rightarrow (ABC) \perp (BCD)$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) là 90^0

2) Gọi E là trung điểm BD, dựng hình chữ nhật $BFCE$

Gọi H là hình chiếu của B trên AF

Ta có $BD \parallel FC \Rightarrow BD \parallel (AFC)$

Suy ra $d(BD, AC) = d(SB, (AFC)) = d(B, (AFC))$

$BH \perp AF$ (1)

CF vuông góc BF và AB. Suy ra $BH \perp CF$ (2)

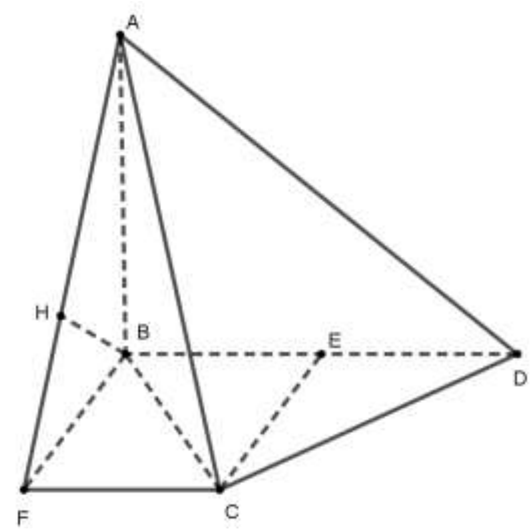
Từ (1) và (2) $\Rightarrow BH \perp (AFC)$.

Vậy $BH = d(B, (AFC) = d(BD, AC)$

Xét tam giác vuông ABF ta có :

$$BH = \frac{BF.AB}{\sqrt{BF^2 + AB^2}} = \frac{CE.AB}{\sqrt{CE^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3}.a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $d(BD, AC) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



Câu 4. (3,0 điểm) Trong một tiết học môn Toán, giáo viên mời ba học sinh A, B, C thực hiện trò chơi chơi như sau : Mỗi bạn A, B, C chọn ngẫu nhiên một số nguyên khác 0 thuộc khoảng $(-6; 6)$ và lần lượt thế vào ba tham số của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$; nếu đồ thị hàm số thu được có ba điểm cực trị đều nằm phía trên trục hoành thì được nhận thưởng. Tính xác suất để ba học sinh A, B, C được nhận thưởng.

Giải

$n(\Omega) = 10^3$

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{-b}{2a}} \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a} + c\right)$, $C\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a} + c\right)$

Trường hợp 1 :

Nếu $a<0$ thì A là điểm cực tiểu nên đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm phía trên trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b>0 \\ y_A>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b>0 \\ c>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in\{-5;-4;-3;-2;-1\} \\ b\in\{1;2;3;4;5\} \\ c\in\{1;2;3;4;5\} \end{cases} \Rightarrow \text{có } 5.5.5=125 \text{ (cách)}$$

Trường hợp 2 :

Nếu $a>0$ thì B,C là điểm cực tiểu nên đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm phía trên trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b<0 \\ y_B>0 \\ y_C>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b<0 \\ \dfrac{b^2}{4a}<c \end{cases}$$

Dễ suy được $c>0$ và $4a\in\{4;8;12;16;20\}$

Ta có các khả năng sau :

Với $c=1\Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<1$, $b=-1\Rightarrow a\in\{1;2;3;4;5\}\Rightarrow$ có 5 (cách)

Với $c=1\Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<1$, $b=-2\Rightarrow a\in\{2;3;4;5\}\Rightarrow$ có 4 (cách)

Với $c=1\Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<1$, $b=-3\Rightarrow a\in\{3;4;5\}\Rightarrow$ có 3 (cách)

Với $c=1\Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<1$, $b=-4\Rightarrow a\in\{5\}\Rightarrow$ có 1 (cách)

Với $c=2\Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<2$, $b=-1\Rightarrow a\in\{1;2;3;4;5\}\Rightarrow$ có 5 (cách)

Với $c=2\Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<2$, $b=-2\Rightarrow a\in\{1;2;3;4;5\}\Rightarrow$ có 5 (cách)

Với $c=2\Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<2$, $b=-3\Rightarrow a\in\{2;3;4;5\}\Rightarrow$ có 4 (cách)

Với $c=2\Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<2$, $b=-4\Rightarrow a\in\{3;4;5\}\Rightarrow$ có 3 (cách)

Với $c=2\Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<2$, $b=-5\Rightarrow a\in\{4;5\}\Rightarrow$ có 2 (cách)

Với $c=3\Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<3$, $b=-1\Rightarrow a\in\{1;2;3;4;5\}\Rightarrow$ có 5 (cách)

Với $c=3\Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<3$, $b=-2\Rightarrow a\in\{1;2;3;4;5\}\Rightarrow$ có 5 (cách)

Với $c=3\Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<3$, $b=-3\Rightarrow a\in\{1;2;3;4;5\}\Rightarrow$ có 5 (cách)

Với $c=3\Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<3$, $b=-4\Rightarrow a\in\{2;3;4;5\}\Rightarrow$ có 4 (cách)

Với $c=3\Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<3$, $b=-5\Rightarrow a\in\{3;4;5\}\Rightarrow$ có 3 (cách)

Với $c=4 \Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<4$, $b=-1 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách)

Với $c=4 \Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<4$, $b=-2 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách)

Với $c=4 \Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<4$, $b=-3 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách)

Với $c=4 \Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<4$, $b=-4 \Rightarrow a \in \{2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 4 (cách)

Với $c=4 \Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<4$, $b=-5 \Rightarrow a \in \{2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 4 (cách)

Với $c=5 \Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<5$, $b=-1 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách)

Với $c=5 \Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<5$, $b=-2 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách)

Với $c=5 \Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<5$, $b=-3 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách)

Với $c=5 \Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<5$, $b=-4 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách)

Với $c=5 \Rightarrow \dfrac{b^2}{4a}<5$, $b=-5 \Rightarrow a \in \{2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 4 (cách)

Trong trường hợp này có : 101 (cách)

Suy ra có tất cả $125+101=226$ (cách chọn)

Vậy xác suất là $\dfrac{226}{1000}=\dfrac{113}{500}$

Câu 5. (2,5 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-x^2y-y^2-2x+1=0 & (1) \\ \sqrt{x}-x-2=\sqrt{3y-2}-2y^2 & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $x \ge 0$, $y \ge \dfrac{2}{3}$

$x^3-x^2y-y^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x^3-x^2y-x^2)+(x^2-xy-x)+(xy-x)+(1-y^2)=0$

$\Leftrightarrow x^2(x-y-1)+x(x-y-1)+x(y-1)+(1-y)(1+y)=0$

$\Leftrightarrow x^2(x-y-1)+x(x-y-1)+(y-1)(x-y-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-y-1)(x^2+x+y-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y+1 \\ x^2+x+y-1=0 \end{array}\right.$

Với $x=y+1$ thay vào (2) ta được

$\sqrt{y+1}-y-3=\sqrt{3y-2}-2y^2 \Leftrightarrow \sqrt{3y-2}-\sqrt{y+1}+(2y^2-y-3)=0$

$$\Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{2y-3}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+1}}+(2y-3)(y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{3}{2}\Rightarrow x=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+1}}+y+1=0\ (VN) \end{array}\right.$$

Trường hợp này có nghiệm $\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

Với $x^2+x+y-1=0 \Leftrightarrow 1-x-x^2=y$, vì $x\ge 0 \Rightarrow 1-x-x^2\le 1 \Rightarrow y\le 1$

Kết hợp điều kiện ta được $\frac{2}{3}\le y\le 1$

Ta có $-x^2-x+1=y \Rightarrow \frac{2}{3}\le -x^2-x+1\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2-3x+1\ge 0 \\ -x^2-x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le \frac{-3+\sqrt{21}}{6}<0,3$

$\Leftrightarrow 0\le x\le \frac{-3+\sqrt{21}}{6}<0,3$ (vì $x\ge 0$)

Xét vế trái của (2): $f(x)=\sqrt{x}-x-2$ với $0\le x\le \frac{-3+\sqrt{21}}{6} \Rightarrow \le -\frac{7}{4}\le f(x)\le -2$

Xét vế phải ta có $f(y)=\sqrt{3y-2}-2y^2$ với $\frac{2}{3}\le y\le 1$

Ta có $f'(y)=\frac{3}{2\sqrt{3y-2}}-4y=0 \Leftrightarrow 8y\sqrt{3y-2}=3 \Leftrightarrow 192y^3-128y-9=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}$

Suy ra $-1\le f(y)\le -\frac{5}{8}$ nên phương trình vô nghiệm

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

Câu 6. (2,5 điểm)

1) Cho ba số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+3a}+\frac{c}{2a+3b}$

2) Chứng minh rằng C_{3n}^{n} chia hết cho 3 với mọi n nguyên dương

1) Đặt $\begin{cases} u=2b+3c \\ v=2c+3a \\ w=2a+3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{35}(-6u+9v+4w) \\ b=\dfrac{1}{35}(9u+4v-6w) \\ c=\dfrac{1}{35}(4u-6v+9w) \end{cases}$

$$P=\frac{1}{35}\left(\frac{-6u+9v+4w}{u}+\frac{4u-6v+9w}{v}+\frac{9u+4v-6w}{w}\right)=\frac{1}{35}\left(-18+\frac{9v}{u}+\frac{4w}{u}+\frac{4u}{v}+\frac{9w}{v}+\frac{9u}{w}+\frac{4v}{w}\right)$$

$$=\frac{1}{35}\left(-18+\left(\frac{4v}{u}+\frac{4u}{v}\right)+\left(\frac{4w}{v}+\frac{4v}{w}\right)+\left(\frac{4w}{u}+\frac{4u}{w}\right)+\left(\frac{5v}{u}+\frac{5w}{v}+\frac{5u}{w}\right)\right)$$

$$\geq \frac{1}{35}(-18+2.\sqrt{16}+2\sqrt{16}+2.\sqrt{16}+3\sqrt{125})=\frac{3}{5}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{5}{3} \Leftrightarrow a=b=c$

2) $C_{3n}^{n}=\frac{(3n)!}{n!.(2n)!}=\frac{1.2.3...(3n-1).3n}{1.2.3...n.(2n)!}=3.\frac{1.2.3...(3n-1)}{1.2.3...(n-1).(2n)!}.3=3.C_{3n-1}^{n-1} \Rightarrow C_{3n}^{n}$ chia hết cho 3