SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH	**KỲ THI CHỌN HSG TỈNH NĂM HỌC 2017-2018**
	Khóa ngày 22 tháng 3 năm 2018
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Môn thi: TOÁN**
Họ và tên:……………………..	**LỚP 12 THPT**
SỐ BÁO DANH:……………	Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
	Đề gồm có 01 trang

Câu 1 *(2.0 điểm)*

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=\dfrac{x}{x-1}$, biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

Câu 2 *(2.0 điểm)*

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn: $x^3+x+\log_2\dfrac{x}{y}=8y^3+2y+1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=-x^3+x^2+4y^4+y^2-2xy^2+2xy+4$.

Câu 3 *(2.0 điểm)*

a. Cho $I_n=\int\limits_1^e \ln^n x.dx\ (n\in\mathbb{N}^*)$, chứng minh rằng: $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$

b**.** Tính tích phân sau: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$

Câu 4 *(3.0 điểm)*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC. Giả sử (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, K và luôn cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M, N (M, N không trùng S).

a. Chứng minh rằng: $\dfrac{SB}{SM}+\dfrac{SD}{SN}=3$.

b. Gọi V_1 và V theo thứ tự là thể tích của khối chóp $S.AMKN$ và $S.ABCD$.

Xác định vị trí của mặt phẳng (P) để tỷ số $\dfrac{V_1}{V}$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 *(1.0 điểm)*

Cho a,b,c là các số thực không âm, thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1}\ge\frac{3}{2}$$

------------------HẾT------------------

https://hdgmvietnam.org

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH	KỲ THI CHỌN HSG TỈNH NĂM HỌC 2017-2018
	Khóa ngày 22 tháng 3 năm 2018
HƯỚNG DẪN CHẤM	Môn thi: TOÁN
	LỚP 12 THPT
	Đáp án này gồm có 05 trang

YÊU CẦU CHUNG

** Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận lôgic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.*

** Trong mỗi bài, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu 4 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.*

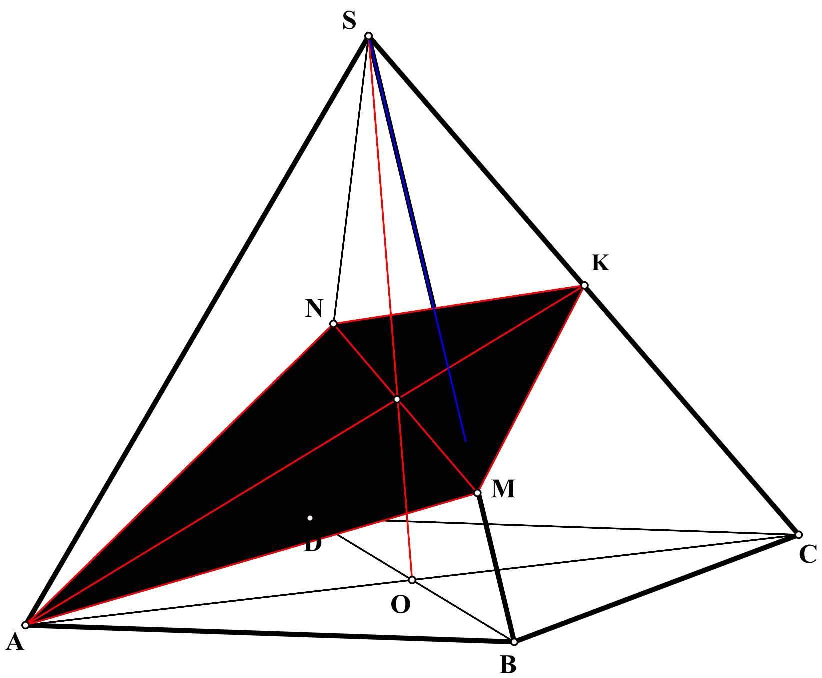
** Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm thành phần là 0,5 điểm thì tuỳ tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.*

** Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tuỳ theo mức điểm của từng bài.*

** Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài.*

Câu	Nội dung	Điểm
1 ***(2,0 điểm)***	**Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=\frac{x}{x-1}$, biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.**	**2,0**
	Gọi $M\left(x_0;\frac{x_0}{x_0-1}\right), x_0\neq 1$ là tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị (C), tiếp tuyến của (C) tại $M\left(x_0;\frac{x_0}{x_0-1}\right)$ là : $y=-\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0}{x_0-1}\Leftrightarrow x+(x_0-1)^2y-x_0^2=0\,(\Delta)$ Và tâm đối xứng của (C) là $I(1;1)$.	0,50
	Khi đó: $d(I;\Delta)=\frac{\left\|1+(x_0-1)^2-x_0^2\right\|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\frac{2\left\|x_0-1\right\|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}$ $=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{(x_0-1)^2}+(x_0-1)^2}}$	0,50
	Mà $\sqrt{\frac{1}{(x_0-1)^2}+(x_0-1)^2}\geq\sqrt{2}\Rightarrow d(I;\Delta)\leq\sqrt{2}$ Dấu ‘‘=’’ xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{x_0-1}=x_0-1\Leftrightarrow(x_0-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2\end{array}\right.$	0,50
	Với $x_0=0$ tiếp tuyến cần tìm là: $y=-x$ Với $x_0=2$ tiếp tuyến cần tìm là: $y=-x+4$	0,50

<table>
<tr><td rowspan="7">**2**
(2,0 điểm)</td><td>**Cho các số thực dương *x, y* thỏa mãn:** $x^3+x+\log_2\frac{x}{y}=8y^3+2y+1$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$P=-x^3+x^2+4y^4+y^2-2xy^2+2xy+4$.</td><td>**2,0**</td></tr>
<tr><td>Ta có: $x^3+x+\log_2\frac{x}{y}=8y^3+2y+1$
$\Leftrightarrow x^3+x+\log_2 x=(2y)^3+2y+\log_2(2y)\ (*)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Xét hàm số: $f(t)=t^3+t+\log_2 t,\forall t>0$, ta có:
$f'(t)=3t^2+1+\frac{1}{t\ln 2}>0,\ \forall t>0$
Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Khi đó $(*)\Leftrightarrow f(x)=f(2y)\Leftrightarrow x=2y$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Khi đó, ta có:
$P=-x^3+x^2+4y^4+y^2-2xy^2+2xy+4$
$=-8y^3+4y^2+4y^4+y^2-4y^3+4y^2+4$
$=4y^4-12y^3+9y^2+4$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Xét hàm số $P(y)=4y^4-12y^3+9y^2+4,\forall y>0$, ta có:
$P'(y)=16y^3-36y^2+18y$
$P'(y)=0\Leftrightarrow 16y^3-36y^2+18y=0\Leftrightarrow y=0,y=\frac{3}{4},y=\frac{3}{2}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Bảng biến thiên
$\begin{array}{c|c|ccccccc} y & 0 & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{2} & & +\infty \\ \hline P'(y) & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline & & & \frac{337}{64} & & & & +\infty \\ P(y) & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ & 4 & & & & 4 & & \end{array}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Dựa vào bảng biến thiên, ta có:
$\min\limits_{x,y>0} P=4$, khi $x=3,y=\frac{3}{2}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="4">**3**
(2,0 điểm)</td><td>***a.*** **Cho** $I_n=\int_1^e \ln^n x.dx\ (n\in\mathbb{N}^*)$**, chứng minh rằng:** $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$</td><td>**1,0**</td></tr>
<tr><td>Ta có: $I_n=\int_1^e \ln^n x.dx\ (n\in\mathbb{N}^*)\Rightarrow I_{n+1}=\int_1^e \ln^{n+1} x.dx\ (n\in Z^+)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Đặt:
$u=\ln^{n+1}x\Rightarrow du=(n+1)\frac{1}{x}\ln^n x.dx$
$dv=dx\Rightarrow v=x$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Khi đó: $I_{n+1}=\int_1^e \ln^{n+1}x.dx=x.\ln^{n+1}x\Big|_1^e-(n+1)\int_1^e \ln^n x.dx$
$=e-(n+1)I_n$</td><td>0,5</td></tr>
</table>

	b. Tính tích phân sau: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$	**1,0**
	Đặt $x=\frac{\pi}{4}-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}, x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=0$	0,25
	Khi đó: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]dt$ $=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt$	0,25
	$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$	0,25
	Vậy $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\frac{\pi}{8}\ln 2$	0,25
4 ***(3,0 điểm)***	**Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC. Giả sử (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A,K và luôn cắt các cạnh SB,SD lần lượt tại M,N (M,N không trùng S).**	**3,0**
	a. Chứng minh rằng: $\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}=3$.	**1,5**
		0,5
	Gọi $O=AC\cap BD, I=SO\cap AK$. Qua I dựng đường thẳng d sao cho d luôn cắt các cạnh SB,SD lần lượt tại M,N. Ta có: $V_{S.ADC}=V_{S.ABC}=V_{S.ABD}=V_{S.CBD}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{1}{2}V$	

Khi đó: $\frac{V_{S.ANK}}{V_{S.ADC}} = \frac{SN}{SD}.\frac{SK}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{SN}{SD} \Rightarrow V_{S.ANK} = \frac{1}{2}.\frac{SN}{SD}.V_{S.ADC} = \frac{SN}{4SD}V$

Tương tự

$V_{S.AMK} = \frac{SM}{4SB}V$, $V_{S.AMN} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}.\frac{V}{2}$, $V_{S.MNK} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}.\frac{V}{4}$

0,5

Do đó:

$V_{S.AMKN} = V_{S.ANK} + V_{S.AMK} = V_{S.AMN} + V_{S.KMN}$

$\Leftrightarrow \frac{SN}{4SD}V + \frac{SM}{4SB}V = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}.\frac{V}{2} + \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}.\frac{V}{4} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}.\frac{3V}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3$ (Chia cả 2 vế cho $\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}.\frac{V}{4}$)

0.5

b. Gọi V_1 và V theo thứ tự là thể tích của khối chóp $S.AMKN$ và $S.ABCD$. Xác định vị trí của mặt phẳng (P) để tỷ số $\frac{V_1}{V}$ đạt giá trị lớn nhất.

1,5

Đặt $\frac{SM}{SB} = x, \frac{SN}{SD} = y; (0 < x, y \le 1)$

Theo câu a ta có: $V_1 = \frac{(x+y)}{4}V = \frac{3xy}{4}V \Leftrightarrow x + y = 3xy$

$\Rightarrow y = \frac{x}{3x-1} \Rightarrow x > \frac{1}{3}$ (do $y > 0$)

và $y = \frac{SN}{SD} \le 1 \Rightarrow \frac{x}{3x-1} \le 1 \Leftrightarrow 2x - 1 \ge 0$ (do $3x - 1 > 0$) suy ra $x \ge \frac{1}{2}$

Do đó $\frac{1}{2} \le x \le 1$

0,5

Ta có $\frac{V_1}{V} = \frac{3xy}{4} = \frac{3x^2}{4(3x-1)}$. Đặt $f(x) = \frac{3x^2}{4(3x-1)}; \forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

Tính được $f'(x) = \frac{3(3x^2-2x)}{4(3x-1)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \frac{2}{3}$

0,5

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

$\frac{V_1}{V}$ có giá trị lớn nhất là $\frac{3}{8}$ khi $\left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow M \equiv B \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy mặt phẳng (P) trùng với mặt phẳng (ABK) hoặc mặt phẳng (P) đi qua AK và trung điểm của SB.

0,5

5 *(1,0 điểm)*	**Cho** a,b,c **là các số thực không âm, thỏa mãn** $a+b+c=3$**. Chứng minh rằng:** $\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1}\ge\frac{3}{2}$	**1,0**
	Ta có : +) $9=(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3$ +) $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$ +) $\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n}+\frac{c^2}{p}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{m+n+p};\forall m,n,p>0$	0,25
	Khi đó: $S=\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1}=\frac{a^4}{a^2\left(b^2+1\right)}+\frac{b^4}{b^2\left(c^2+1\right)}+\frac{c^4}{c^2\left(a^2+1\right)}$ Nên $S\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2+b^2+c^2}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+a^2+b^2+c^2}$ Đặt $t=a^2+b^2+c^2\ge 3$ ta được: $S\ge\frac{t^2}{\frac{1}{3}t^2+t}=\frac{3t}{t+3}=f(t),\forall t\in\left[3;+\infty\right)$	0,25
	Do $f'(t)=\frac{9}{(t+3)^2}>0,\forall t\in\left[3;+\infty\right)$ suy ra hàm số đồng biến trên $\forall t\in\left[3;+\infty\right)$ Từ đây: $S\ge f(t)\ge f(3)=\frac{3}{2}$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=3$ hay $a=b=c=1$	0,25 0,25