

**GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH THỪA THIÊN HUẾ**  
**NĂM HỌC 2018 - 2019.**

(Lời giải gồm 05 trang)

**Câu 1: (4,0 điểm)**

Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Tiếp tuyến tại M của đồ thị (C) cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại hai điểm A và B.

- a) Chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng AB.  
b) Xác định tọa độ điểm M để chu vi tam giác IAB nhỏ nhất.

**Giải:**

a) Ta có  $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$ . Gọi  $M\left(a; \frac{2a-1}{a-1}\right)$  ( $a \neq 1$ ) là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) tại điểm M là:  $y = -\frac{1}{(a-1)^2}(x-a) + \frac{2a-1}{a-1}$ .

Giả sử A, B lần lượt là giao điểm của d với đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Suy ra:  $A\left(1; \frac{2a}{a-1}\right)$ ,  $B(2a-1; 2)$

Khi đó:  $\begin{cases} x_A + x_B = 1 + (2a-1) = 2a = 2x_M \\ y_A + y_B = \frac{2a}{a-1} + 2 = \frac{4a-2}{a-1} = 2y_M \end{cases} \Rightarrow M$  là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Ta có  $IA = \frac{2}{|a-1|}$ ;  $IB = 2|a-1| \Rightarrow IA \cdot IB = 4$

Tam giác IAB vuông tại I nên:

$$IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB} = 4 + 2\sqrt{2}$$

Vậy chu vi tam giác IAB nhỏ nhất bằng  $4 + 2\sqrt{2}$  khi và chỉ khi:

$$IA = IB \Leftrightarrow \frac{2}{|a-1|} = 2|a-1| \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow M(0; 1) \\ a = 2 \Rightarrow M(2; 3) \end{cases}$$

**Câu 2: (4,0 điểm)**

a) Giải phương trình  $2\sqrt{2} \cos 2x - \sin 2x \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - 4 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

b) Giải phương trình  $2x + 3 + (x+1)\sqrt{x^2+6} + (x+2)\sqrt{x^2+2x+9} = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

**Giải:**

a) Phương trình tương đương với:

$$2\sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - \sin 2x \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x\right) - 4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + \sin 2x(\cos x + \sin x) - 4(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x = 0 & (1) \\ 4(\cos x - \sin x) + \sin 2x - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

\*Ta có (1)  $\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

\*Giải (2): Đặt  $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

Phương trình trở thành:  $4t + 1 - t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$  (loại)

Với  $t = 1$  ta có  $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình ban đầu có 3 họ nghiệm là  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = k2\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

b) Đặt  $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + 2x + 9} > 0 \\ v = \sqrt{x^2 + 6} > 0 \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{u^2 - v^2 - 3}{2}$

Phương trình đã cho trở thành:  $u^2 - v^2 + v \cdot \left(\frac{u^2 - v^2 - 1}{2}\right) + u \cdot \left(\frac{u^2 - v^2 + 1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2(u^2 - v^2) + (u + v)(u^2 - v^2) + (u - v) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 0 \\ 2(u + v) + (u + v)^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u + v = -1 \quad (vn) \end{cases}$

Với  $u = v$  ta có  $\sqrt{x^2 + 6} = \sqrt{x^2 + 2x + 9} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ .

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là  $x = -\frac{3}{2}$ .

**Câu 3: (4,0 điểm)**

a) Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 + 4x - y - 2 = 0 \\ \sqrt{2x + y + 5} - \sqrt{3 - x - y} = x^3 - 3x^2 - 10y - 10 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$ .

b) Cho tập  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được chọn từ các phần tử của tập  $A$ . Chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập  $S$ . Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 15.

**Giải:**

a) Điều kiện  $\begin{cases} 2x + y + 5 \geq 0 \\ 3 - x - y \geq 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương:  $(x - 1)^3 + (x - 1) = y^3 + y$

$\Leftrightarrow (x - y - 1) \left[ (x - 1)^2 + y(x - 1) + y^2 + 1 \right] = 0$

$\Leftrightarrow y = x - 1$

Thay  $y = x - 1$  vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x + 4} - \sqrt{4 - 2x} &= x^3 - 3x^2 - 10x \\ \Leftrightarrow \frac{5x}{\sqrt{3x + 4} + \sqrt{4 - 2x}} &= x(x - 5)(x + 2) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x - 5)(x + 2)(\sqrt{3x + 4} + \sqrt{4 - 2x}) = 5 \end{cases} & (*) \end{aligned}$$

Do  $-\frac{4}{3} \leq x \leq 2$  nên  $VT(*) < 0$  nên phương trình (\*) vô nghiệm.

b) Gọi  $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$  là số tự nhiên cần tìm, trong đó các chữ số lấy từ tập  $A$ .

\*Số phần tử của tập  $S$  là số các số tự nhiên có 5 chữ số với các chữ số khác nhau lấy từ tập  $A$ .

Ta có  $n(S) = 6A_6^4 = 2160$

\*Do  $n$  chia hết cho 15 nên  $n$  chia hết cho 3 và 5. Suy ra:  $a_5 = 0$  hoặc  $a_5 = 5$ .

**TH1:**  $a_5 = 0 \Rightarrow n = \overline{a_1a_2a_3a_40}$  trong đó 4 số  $a_1, a_2, a_3, a_4$  lấy từ tập  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Khi đó để  $n$  chia hết cho 3 thì  $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) : 3$

Do 4 số  $a_1, a_2, a_3, a_4$  lấy từ tập  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  nên xảy ra 2TH sau:

i) Trong 4 số đó gồm: hai số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2

Có tất cả:  $A_4^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$  số.

ii) Trong 4 số đó gồm: hai số chia 3 dư 1, hai số chia 3 dư 2

Có tất cả:  $A_4^2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$  số.

**TH2:**  $a_5 = 5 \Rightarrow n = \overline{a_1a_2a_3a_45}$  trong đó 4 số  $a_1, a_2, a_3, a_4$  lấy từ tập  $\{0; 1; 2; 3; 4; 6\}$

Khi đó để  $n$  chia hết cho 3 thì  $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$  chia 3 dư 1.

Do 4 số  $a_1, a_2, a_3, a_4$  lấy từ tập  $\{0; 1; 2; 3; 4; 6\}$  nên xảy ra 2TH sau:

iii) Trong 4 số đó gồm: ba số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1

\*Nếu  $a_1 = 3$  thì  $a_2, a_3, a_4$  là các số trong bộ ba số  $\{0; 6; 1\}, \{0; 6; 4\}$  nên có  $3! + 3! = 12$  số

\*Nếu  $a_1 = 6$  thì  $a_2, a_3, a_4$  là các số trong bộ ba số  $\{0; 3; 1\}, \{0; 3; 4\}$  nên có  $3! + 3! = 12$  số

\*Nếu  $a_1 = 1$  hoặc  $a_1 = 4$  thì  $a_2, a_3, a_4$  là các số trong bộ ba số  $\{0; 3; 6\}$  nên có  $3! + 3! = 12$  số

Có tất cả: 36 số.

iv) Trong 4 số đó gồm: một số chia hết cho 3, hai số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2

\*Nếu  $a_1 = 3$  hoặc  $a_1 = 6$  thì  $a_2, a_3, a_4$  là các số trong bộ ba số  $\{1; 2; 4\}$  nên có  $3! + 3! = 12$  số

\*Nếu  $a_1 = 1$  thì  $a_2, a_3, a_4$  là các số trong bộ ba số  $\{2; 4; 6\}, \{2; 4; 3\}, \{2; 4; 0\}$  nên có  $3 \cdot 3! = 18$  số

\*Nếu  $a_1 = 2$  hoặc  $a_1 = 4$  thì tương tự đều có 18 số thỏa mãn.

Có tất cả:  $12 + 18 \cdot 3 = 66$  số.

Vậy xác suất cần tính là:  $\frac{96 + 48 + 36 + 66}{2160} = \frac{41}{360}$ .

**Bài 4: (3,0 điểm)**

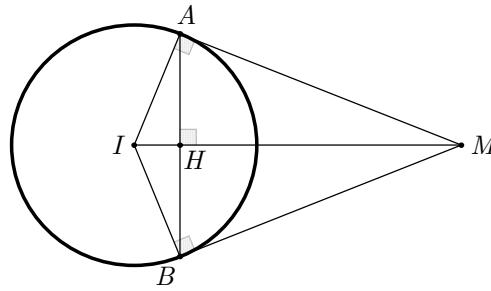
Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta: 5x - 2y - 19 = 0$  và đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ . Từ một điểm  $M$  nằm trên đường thẳng  $\Delta$  kẻ hai tiếp tuyến  $MA, MB$  đến đường tròn  $(C)$  với  $A, B$  là hai tiếp điểm. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMB$  biết  $AB = \sqrt{10}$ .

**Giải:**

\*Các tam giác  $IAM, IBM$  là các tam giác vuông nên đường tròn đường kính  $IM$  đi qua hai điểm  $A, B$  nên đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMB$  là đường tròn đường kính  $IM$ .

\*Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(2;1)$  bán kính  $R = \sqrt{5}$

$$\text{Ta có } IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow IM = \frac{IA^2}{IH} = \sqrt{10}$$



Gọi  $M\left(a; \frac{5a-19}{2}\right) \in \Delta$ . Ta có  $IM^2 = 10 \Leftrightarrow (a-2)^2 + \left(\frac{5a-19}{2} - 1\right)^2 = 10$

Giải ra được  $\begin{cases} a=3 \\ a=\frac{139}{29} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(3; -2) \\ M\left(\frac{139}{29}; \frac{72}{29}\right) \end{cases}$

\*Với  $M(3; -2)$  thì trung điểm  $IM$  là  $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ , phương trình đường tròn đường kính  $IM$  là:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

\*Với  $M\left(\frac{139}{29}; \frac{72}{29}\right)$  thì trung điểm  $IM$  là  $\left(\frac{197}{58}; \frac{37}{26}\right)$ , phương trình đường tròn đường kính

$$IM \text{ là: } \left(x - \frac{197}{58}\right)^2 + \left(y - \frac{37}{26}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

**Bài 5: (3,0 điểm)**

Cho tam giác đều  $OAB$  có  $AB = a$ . Trên đường thẳng  $(d)$  đi qua  $O$  vuông góc với mặt phẳng  $(OAB)$  lấy một điểm  $M$  sao cho  $OM = x$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $MB$  và  $OB$ . Đường thẳng  $EF$  cắt đường thẳng  $(d)$  tại  $N$ .

- Chứng minh rằng  $AN \perp BM$ .
- Xác định  $x$  theo  $a$  để thể tích khối tứ diện  $ABMN$  nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

**Giải:**

a) Ta có  $\begin{cases} AF \perp OB \\ AF \perp OM \end{cases} \Rightarrow AF \perp MB$

Mà  $AE \perp MB$  nên  $BM \perp (AEF)$

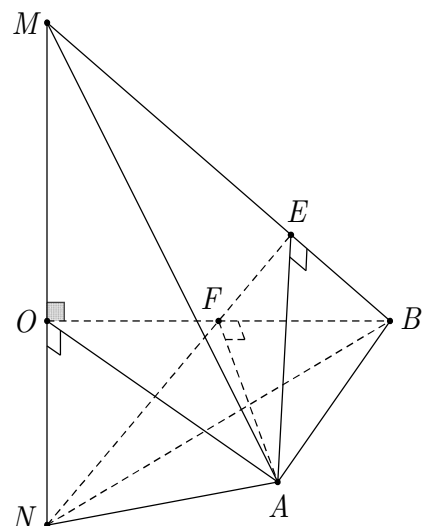
Do  $AN \subset (AEF)$  nên  $AN \perp BM$ .

b) Theo câu a) ta có:

$$\overline{AN} \cdot \overline{BM} = 0 \Leftrightarrow (\overline{ON} - \overline{OA})(\overline{OM} - \overline{OB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -OM \cdot ON + OA \cdot OB \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$\Leftrightarrow ON = \frac{OA \cdot OB \cdot \cos 60^\circ}{OM} = \frac{a^2}{2x}$$



$$\text{Do } MN \perp (OAB) \text{ nên } V_{ABMN} = \frac{1}{3} \cdot MN \cdot S_{OAB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \left( x + \frac{a^2}{2x} \right) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12} \left( x + \frac{a^2}{2x} \right)$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Cô-si thì: } x + \frac{a^2}{2x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{a^2}{2x}} = \sqrt{2}a$$

$$\text{Suy ra: } V_{ABMN} \geq \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}.$$

$$\text{Vậy thể tích lớn nhất của khối tứ diện } ABMN \text{ là } \frac{a^3 \sqrt{6}}{12} \text{ khi } x = \frac{a^2}{2x} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

**Bài 6: (2,0 điểm)**

Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2018$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} + \frac{3029}{2}$ .

**Giải:**

\*Xét bất đẳng thức phụ:  $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$  với mọi  $a, b > 0$ .

\*Dùng bất đẳng thức ở trên ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{(x+y)+(x+z)} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right) \leq \frac{1}{16} \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{16} \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right); \quad \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right)$$

$$\text{Suy ra: } P \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{3029}{2} = \frac{2018}{4} + \frac{3029}{2} = 2019$$

Vậy giá trị lớn nhất của  $P$  bằng 2019 đạt được khi và chỉ khi  $x = y = z = \frac{3}{2018}$ .

----- HẾT -----