SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI DƯƠNG

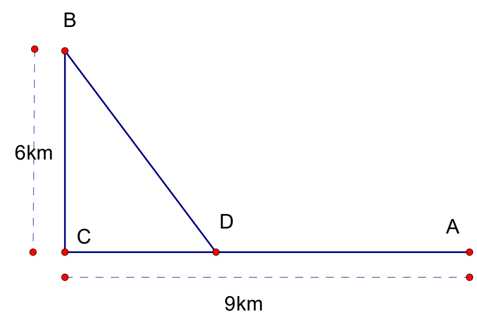
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 THPT
NĂM HỌC 2017 – 2018
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút(không kể thời gian giao đề)
(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 1(2,0 điểm):

1) Cho $I(2;1)$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích ΔIAB bằng $8\sqrt{2}$.

2) Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta cần xác định một vị trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB. Tính khoảng cách AD để số tiền chi phí thấp nhất, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là 100.000.000 đồng và dưới nước là 260.000.000 đồng.



Câu 2 (2,0 điểm):

1) Giải phương trình $\dfrac{8}{\sin^3 2x} + \tan x = \cot^3 x$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 13x = y^3 + y + 10 \\ \sqrt{2x + y + 2} - \sqrt{5 - x - y} = x^3 - 3x^2 + 10y - 8 \end{cases}$.

Câu 3 (2,0 điểm):

1) Cho dãy số (u_n) có $u_1 = -7, u_{n+1} = 5u_n - 12 \ (n \in \mathbb{N}^*)$. Tìm $\lim \dfrac{u_n}{5^n}$.

2) Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (I) có hai đường kính AB và MN với $A(1;3), B(3;-1)$. Tiếp tuyến của (I) tại B cắt các đường thẳng AM và AN lần lượt tại E và F. Tìm tọa độ trực tâm H của ΔMEF sao cho H nằm trên đường thẳng $d: x - y + 6 = 0$ và có hoành độ dương.

Câu 4 (3,0 điểm):

Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^0, \widehat{CSB} = 90^0, \widehat{ASC} = 120^0$.

1) Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

2) Gọi I, J, G lần lượt là trung điểm SC, AB, IJ. Mặt phẳng (P) đi qua G cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Gọi $V_{A.A'B'C'}, V_{B.A'B'C'}, V_{C.A'B'C'}$ lần lượt là thể tích các khối chóp $A.A'B'C'$, $B.A'B'C'$, $C.A'B'C'$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = V_{A.A'B'C'} + V_{B.A'B'C'} + V_{C.A'B'C'}$ theo a.

3) Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt trên cạnh AB và SC sao cho $\dfrac{CN}{SC} = \dfrac{AM}{AB}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng MN.

Câu 5 (1,0 điểm):

Với các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{2a + b + \sqrt{8bc}} - \dfrac{8}{\sqrt{2b^2 + 2(a+c)^2 + 5}}$.

..............................**HẾT**.................................

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu*
- *Giám thị không giải thích gì thêm*

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:..

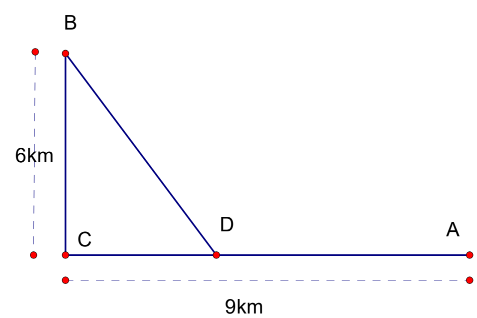
Chữ ký của giám thị 1:...................................Chữ ký của giám thị 2:..

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI DƯƠNG

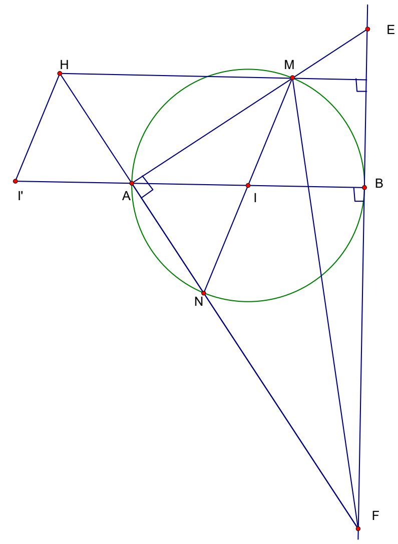
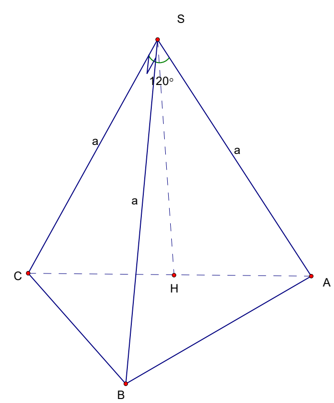
HƯỚNG DẪN CHẤM

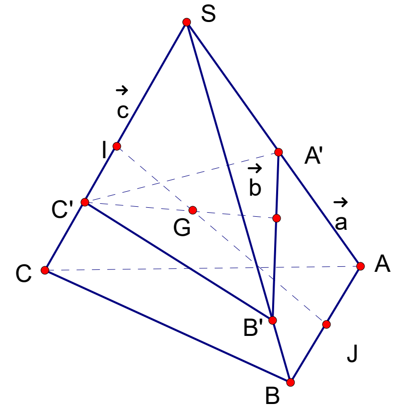
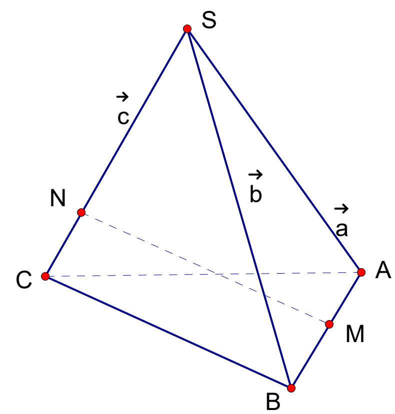
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2017 – 2018
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 04 tháng 10 năm 2017
(Hướng dẫn chấm gồm 05 trang)

(Điểm toàn bài lấy điểm lẻ đến 0,25; thí sinh làm cách khác mà đúng vẫn cho điểm tối đa)

Câu	Nội dung	Điểm
I.1	1) Tìm tất cả các giá trị của m để (C_m) $y = x^3 - 3mx + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích ΔIAB bằng $8\sqrt{2}$ với I(2;1).	**(1,0đ)**
	TXĐ: D= $\mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 3m; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = m$ (1) (C_m) có hai điểm cực trị A, B $\Leftrightarrow$ PT (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$	0,25
	Khi đó: $A\left(\sqrt{m};-2m\sqrt{m}+1\right)$, $B\left(-\sqrt{m};2m\sqrt{m}+1\right)$ Phương trình AB: $y = -2mx + 1$ hay $2mx + y - 1 = 0$ Ta có: $AB = \sqrt{4m\left(4m^2+1\right)}$, $d\left(I;AB\right) = \dfrac{\lvert 4m\rvert}{\sqrt{4m^2+1}} = \dfrac{4m}{\sqrt{4m^2+1}}$ $(Do\, m > 0)$	0,25
	$S_{\triangle ABI} = \dfrac{1}{2}.AB.d\left(I;AB\right) = \dfrac{1}{2}.\sqrt{4m\left(4m^2+1\right)}.\dfrac{4m}{\sqrt{4m^2+1}} = 8\sqrt{2}$	0,25
	$\Leftrightarrow 4m\sqrt{m} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow m\sqrt{m} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 2\,(TM)$ Kết luận: m = 2	0,25
I.2	2) Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta cần xác định một vị trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB. Tính khoảng cách AD để số tiền chi phí thấp nhất, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là 100.000.000 đồng và dưới nước là 260.000.000 đồng.	**(1,0đ)**
	+ Đặt CD = x (km), $x \in [0;9]$ $\Rightarrow$ CD = $\sqrt{x^2+36}$; $AD = 9 - x$ nên chi phí xây dựng đường ống là :  $T(x) = 260000000\sqrt{x^2+36} + 100000000(9-x)$ đồng	0,25
	+ Xét hàm số T(x) trên đoạn [0 ; 9] ta có : $T'(x) = 20000000\left(\dfrac{13x}{\sqrt{x^2+36}} - 5\right) \Rightarrow T'(x) = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{x^2+36}$ $\Leftrightarrow 168x^2 = 25\left(x^2+36\right) \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.	0,25
	+ Lại có $T(0) = 2460000000$; $T(\dfrac{5}{2}) = 2340000000$; $T(9) = 260000000\sqrt{117}$ Suy ra T(x) đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn [0 ; 9] bằng 2340000000 khi $x = \dfrac{5}{2}$.	0,25
	+ Vậy chi phí lắp đặt thấp nhất bằng 2340000000 đồng khi $x = \dfrac{5}{2}$ hay điểm D cách A một	0,25

	khoảng bằng 6,5 km.	
II.1	1) Giải phương trình $\dfrac{8}{\sin^3 2x}+\tan x=\cot^3 x$.	**(1,0đ)**
	Điều kiện: $\sin 2x\neq 0$. PT tương đương với $\dfrac{8}{\sin^3 2x}=\dfrac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\sin^3 x\cos x}$	0,25
	$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos^2 x}=\cos^2 x-\sin^2 x\Leftrightarrow 1=\cos 2x.\cos^2 x$	0,25
	$\Leftrightarrow \cos^2 2x+\cos 2x-2=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\\ \cos 2x=-2\end{array}\right.$ kết hợp với điều kiện : phương trình vô nghiệm	0,25
II.2	2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-6x^2+13x=y^3+y+10 & (1)\\ \sqrt{2x+y+2}-\sqrt{5-x-y}=x^3-3x^2+10y-8 & (2)\end{cases}$	**(1,0đ)**
	* ĐK: $\begin{cases}2x+y+2\geq 0\\ 5-x-y\geq 0\end{cases}$ $(1)\Leftrightarrow (x-2)^3+x-2=y^3+y\ (*)$	0,25
	Xét hàm số $f(t)=t^3+t$. Ta có $f'(t)=3t^2+1>0\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ Do đó $(*)\Leftrightarrow y=x-2$.	0,25
	Thay $y=x-2$ vào (2) ta được : $\sqrt{3x}-\sqrt{7-2x}=x^3-3x^2+10x-28$ $\Leftrightarrow \sqrt{3x}-3+1-\sqrt{7-2x}=x^3-3x^2+10x-30\Leftrightarrow \dfrac{3(x-3)}{\sqrt{3x}+3}+\dfrac{2(x-3)}{1+\sqrt{7-2x}}=(x-3)(x^2+10)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ \dfrac{3}{\sqrt{3x}+3}+\dfrac{2}{1+\sqrt{7-2x}}=x^2+10\ (3)\end{array}\right.$	0,25
	PT (3) vô nghiệm vì với $0\leq x\leq \dfrac{7}{2}$ thì $\dfrac{3}{\sqrt{3x}+3}+\dfrac{2}{1+\sqrt{7-2x}}\leq 1+2=3, x^2+10\geq 10$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$.	0,25
III.1	1) Cho dãy số (u_n) có $u_1=-7, u_{n+1}=5u_n-12\ (n\in\mathbb{N}^*)$. Tìm $\lim\dfrac{u_n}{5^n}$.	**(1,0đ)**
	$u_{n+1}=5u_n-12\Leftrightarrow u_{n+1}-3=5(u_n-3)$	0,25
	Đặt $v_n=u_n-3\Rightarrow v_{n+1}=5v_n\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ dãy số (v_n) lập thành cấp số nhân có công bội $q=5, v_1=u_1-3=-10$	0,25
	$\Rightarrow v_n=v_1q^{n-1}=-10.5^{n-1}\Rightarrow u_n=-2.5^n-3$	0,25
	$\Rightarrow \lim\dfrac{u_n}{5^n}=\lim\dfrac{-2.5^n-3}{5^n}=\lim[-2-3\left(\dfrac{1}{5}\right)^n]=-2$	0,25
III.2	3) 2) Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (I) có hai đường kính AB và MN với $A(1;3), B(3;-1)$. Tiếp tuyến của (I) tại B cắt các đường thẳng AM và AN lần lượt tại E và F. Tìm tọa độ trực tâm H của ΔMEF sao cho H nằm trên đường thẳng $d: x-y+6=0$ và có hoành độ dương.	**(1,0đ)**

	Đường tròn (I) có tâm $I(2;1)$,bán kính $r=\sqrt{5}$. AF là đường cao tam giác MEF nên H,A,F thẳng hàng AI song song với HM nên $\frac{AI}{HM}=\frac{NI}{NM}=\frac{1}{2}\Rightarrow$ HM = 2AI  	0,25
	Gọi I’đối xứng với I qua A nên $I'(0;5)$. I I’ = 2AI = HM, I I’ / /HM nên HMI I’ là hình bình hành $\Rightarrow$ I’H=IM=r=$\sqrt{5}$	0,25
	$H\in d\Rightarrow H(t;t+6), t>0; I'H=\sqrt{5}\Leftrightarrow (t-0)^2+(t+6-5)^2=5$	0,25
	$\Leftrightarrow 2t^2+2t-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2(l)\end{array}\right.$. Vậy $H(1;7)$.	0,25
IV.1	Cho hình chóp S.ABC có $SA=SB=SC=a$, $\widehat{ASB}=60^0, \widehat{CSB}=90^0, \widehat{ASC}=120^0$. 1) Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.	**(1,0đ)**
	Xét tứ diện SABC có : $SA=SB=SC=a$ Δ ABS đều :do SA=SB, $\widehat{ASB}=60^0\Rightarrow AB=a$ Δ SBC vuông tại S $BC=a\sqrt{2}$ $\Delta SAC: AC=\sqrt{SA^2+SC^2-2SA.SC.\mathrm{Cos}120^0}=a\sqrt{3}$  	0,25
	Có : $AC^2=AB^2+BC^2\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B	0,25
	Hình chóp S.ABC có $SA=SB=SC=a$. Hạ SH $\perp$ (ABC)$\Rightarrow$H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC $\Rightarrow$H là trung điểm của AC	0,25
	Xét Δ SAC:SH=$\frac{a}{2}$; Có : $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	0,25
IV.2	2) Gọi I, J, G lần lượt là trung điểm SC, AB, IJ. Mặt phẳng (P) đi qua G cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A’, B’, C’. Gọi $V_{A.A'B'C'}, V_{B.A'B'C'}, V_{A.A'B'C'}$ lần lượt là thể tích các khối chóp $A.A'B'C', B.A'B'C', A.A'B'C'$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=V_{A.A'B'C'}+V_{B.A'B'C'}+V_{C.A'B'C'}$ theo a.	**(1,0đ)**

	Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{SA},\vec{b}=\overrightarrow{SB},\vec{c}=\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SA'}=x\overrightarrow{SA}=x\vec{a},$ $\overrightarrow{SB'}=y\overrightarrow{SB}=y\vec{b},\overrightarrow{SC'}=z\overrightarrow{SC}=z\vec{c}(0<x,y,z\le 1)$ $\overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{SA'}-\overrightarrow{SC'}=x\vec{a}-z\vec{c},\overrightarrow{C'B'}=\overrightarrow{SB'}-\overrightarrow{SC'}=y\vec{b}-z\vec{c}$ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GS}=2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{C'B}+\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{C'S}=4\overrightarrow{C'G}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{C'G}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}-4\overrightarrow{SC'})=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{c}(\frac{1}{4}-z)(1)$  	0,25
	Do A’, B’, C’, G đồng phẳng nên $\overrightarrow{C'G}=m\overrightarrow{C'A'}+n\overrightarrow{C'B'}=mx\vec{a}+ny\vec{b}+\vec{c}(-mz-nz)(2)$ Mà $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng nên từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} mx=\frac{1}{4} \\ ny=\frac{1}{4} \\ -mz-nz=\frac{1}{4}-z \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$	0,25
	Ta có $\frac{V_{A.A'B'C'}}{V_{S.A'B'C'}}=\frac{AA'}{SA'}=\frac{SA-SA'}{SA'}=\frac{1}{x}-1$ Tương tự ta có $\frac{V_{A.A'B'C'}}{V_{S.A'B'C'}}+\frac{V_{B.A'B'C'}}{V_{S.A'B'C'}}+\frac{V_{C.A'B'C'}}{V_{S.A'B'C'}}=\frac{1}{x}-1+\frac{1}{y}-1+\frac{1}{z}-1=1$ $\Leftrightarrow V_{A.A'B'C'}+V_{B.A'B'C'}+V_{C.A'B'C'}=V_{S.A'B'C'}$ $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=xyz\Rightarrow V_{S.A'B'C'}=xyzV_{S.ABC}$	0,25
	Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân $4=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\Leftrightarrow xyz\ge\frac{27}{64}\Rightarrow P=V_{A.A'B'C'}+V_{B.A'B'C'}+V_{C.A'B'C'}\ge\frac{27}{64}V_{S.ABC}=\frac{9a^3\sqrt{2}}{256}$ khi $x=y=z=\frac{3}{4}$ thì $P=\frac{9a^3\sqrt{2}}{256}$ nên giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9a^3\sqrt{2}}{256}$	0,25
IV.3	3)Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt trên cạnh AB và SC sao cho $\frac{CN}{SC}=\frac{AM}{AB}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng MN.	**(1,0đ)**
	Đặt $\frac{CN}{SC}=\frac{AM}{AB}=m(0\le m\le 1)$ $\Rightarrow \overrightarrow{NC}=m\overrightarrow{SC}=m\vec{c},\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}=m(\vec{b}-\vec{a})$ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CN}=-m(\vec{b}-\vec{a})-\vec{a}+\vec{c}-m\vec{c}$ $=(m-1)\vec{a}-m\vec{b}+(1-m)\vec{c}$  	0,25
	Do $\vec{a}.\vec{b}=\frac{a^2}{2},\vec{b}.\vec{c}=0,\vec{a}.\vec{c}=-\frac{a^2}{2}$ nên $MN^2=(3m^2-5m+3)a^2$	0,25

<table>
<tr><td></td><td>$= 3a^2(m-\frac{5}{6}) + \frac{11}{12}a^2 \geq \frac{11}{12}a^2 \Rightarrow MN \geq \frac{a\sqrt{33}}{6} \; \forall m \in [0;1]$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Dấu đẳng thức xảy ra khi $m = \frac{5}{6}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của MN là $\frac{a\sqrt{33}}{6}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>V</td><td>Với các số thức dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{2a+b+\sqrt{8bc}} - \frac{8}{\sqrt{2b^2+2(a+c)^2}+5}$.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Ta có $\sqrt{8bc} = 2\sqrt{b.2c} \leq b+2c \Rightarrow \frac{1}{2a+b+\sqrt{8bc}} \geq \frac{1}{2(a+b+c)}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Mặt khác $\sqrt{2(a+c)^2+2b^2} \geq (a+c)+b \Rightarrow \frac{-8}{5+\sqrt{2(a+c)^2+2b^2}} \geq \frac{-8}{5+a+b+c}$.

Do đó $P \geq \frac{1}{2(a+b+c)} - \frac{8}{5+a+b+c}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Đặt $t = a+b+c,\ t>0.$
Xét $f(t) = \frac{1}{2t} - \frac{8}{5+t},\ t>0.$
Ta có
$f'(t) = -\frac{1}{2t^2} + \frac{8}{(5+t)^2} = \frac{(3t-5)(5t+5)}{2t^2(5+t)^2},\ t>0.$
$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{3}$
Bảng biến thiên
<table>
<tr><td>t</td><td>0</td><td>$\frac{5}{3}$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f'(t)</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>f(t)</td><td>$\searrow$</td><td>$-\frac{9}{10}$</td><td>$\nearrow$</td></tr>
</table></td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Từ bảng biến thiên
$\Rightarrow f(t) \geq f(\frac{5}{3}) = -\frac{9}{10} \; \forall t>0 \quad \Rightarrow P \geq f(a+b+c) \geq -\frac{9}{10}$
Khi $a = c = \frac{5}{12}, b = \frac{5}{6}$ thì $P = -\frac{9}{10}$.Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{9}{10}$</td><td>0,25</td></tr>
</table>