SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **HÀ NAM**	**KỲ THI CHỌN HSG LỚP 12 VÀ THÀNH LẬP ĐỘI TUYỂN THAM DỰ KỲ THI CHỌN HSG QUỐC GIA** **NĂM HỌC 2020 - 2021**
ĐỀ CHÍNH THỨC *(Đề thi gồm 01 trang)*	**Môn: Toán** *Thời gian làm bài: 180 phút*

Bài 1 (6 điểm).

1.Cho hàm số $f(x)=-x+\sqrt{(a+x)(b+x)}$ trong đó a,b là hai số thực dương khác nhau cho trước.

Chứng minh rằng với mỗi số thực $s\in(0;1)$ đều tồn tại duy nhất số thực dương x_0 sao cho $f(x_0)=(\frac{a^s+b^s}{2})^{\frac{1}{s}}$.

2. Xếp 35 học sinh, trong đó có bốn bạn Dũng, Minh, Công, Đoàn thành một hàng ngang. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp hàng, mà trong mỗi cách xếp hàng không có ba bạn nào trong bốn bạn Dũng, Minh, Công, Đoàn đứng ở ba vị trí liên tiếp.

Bài 2 (4 điểm).

Cho hàm số $f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x+5}{x+1}$

1. Chứng minh đồ thị hàm số có ba điểm cực trị không thẳng hàng.

2. Gọi A,B,C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 3 (3 điểm).

Cho p là một số nguyên tố lẻ và a là một số nguyên sao cho $(a,p)=1$.

Chứng minh phương trình $x^2\equiv a(\bmod p)$ có nghiệm khi và chỉ khi $a^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1(\bmod p)$

Bài 4 (3 điểm).

Tìm tất cả các hàm $f:R\to R$ thỏa mãn điều kiện

$f(x^2)+4y^2.f(y)=(f(x-y)+y^2).(f(x+y)+f(y))$ với mọi $x,y\in R$

Bài 5 (4 điểm).

Cho tứ giác $ABCD$ cố định, có hai đường chéo AC,BD cắt nhau tại P. Đường trung trực của các đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại K. Một đường thẳng d thay đổi đi qua K, cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB tại Q,R. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác PQR luôn nằm trên một đường tròn cố định, khi đường thẳng d thay đổi.

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh ....

Chữ ký giám thị 1: .... Chữ ký giám thị 2: ....