LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN ĐỀ VMO 2019 – 2020

(Lê Phúc Lữ tổng hợp và giới thiệu)

Xin cám ơn các thầy Võ Quốc Bá Cẩn, Nguyễn Lê Phước, Nguyễn Văn Linh và các bạn Đoàn Cao Khả, Nguyễn Công Thành, Nguyễn Mạc Nam Trung đã chia sẻ một số nội dung để có thể hoàn tất tài liệu này.

Kỳ thi chọn HSG quốc gia (viết tắt là VMO) năm nay diễn ra vào các ngày 27, 28 tháng 12/2019. Cấu trúc đề năm nay là:

1. *Giới hạn dãy số.*
2. *Bất đẳng thức.*
3. *Dãy số nguyên.*
4. *Hình học phẳng.*
5. *Hệ phương trình.*
6. *Hình học phẳng.*
7. *Tổ hợp.*

Tổng quan về đề thi, có thể nói đề ngày 1 so với "cùng kỳ năm trước" quả thật rất khác. Các câu hỏi đều có ý a để dẫn dắt gợi mở và thậm chí là cho điểm. Ý tưởng tuy không mới mẻ bằng năm trước nhưng cũng là các thử thách đáng kể với thí sinh. Hầu hết các thí sinh nếu ôn luyện cẩn thận sẽ làm tốt 4 ý a, và có thể làm thêm 1 ý b nào đó nữa. Các ý b có độ khó cũng khá tương đương nhau, tùy vào sở trường của thí sinh, nhưng nhìn chung số bạn làm được trọn vẹn cả bài hình là không nhiều.

Ngày thi thứ hai có một bất ngờ lớn khi xuất hiện câu biện luận hệ phương trình cũng như ý tổ hợp a quá nhẹ nhàng. Các câu hệ a và tổ a xem như cho điểm hoàn toàn. Cả câu hình và tổ b cũng ở mức trung bình (xây dựng mô hình khá đơn giản). Tuy nhiên, câu hệ b và tổ c quả thực là thách thức lớn, đòi hỏi phải kỹ năng xử lý tình huống tốt. Nhưng nói chung, đề thi năm nay mới mẻ, đòi hỏi thí sinh vừa phải nắm chắc kiến thức, vừa phải có ít nhiều sáng tạo mới có thể làm trọn vẹn được.

Dưới đây là lời giải chi tiết, bình luận phân tích liên quan; một số nội dung có tham khảo tại group "Hướng tới VMO-TST" trên Facebook.

1. Đề thi ngày 1 (ngày 27/12/2019)

Bài 1. *(5 điểm)* Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 1$ và

$$x_{n+1} = x_n + 3\sqrt{x_n} + \frac{n}{\sqrt{x_n}} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{x_n} = 0$.

b) Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{x_n}$.

Bài 2. *(5 điểm)*

a) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| \leq 2\sqrt{2}.$$

b) Cho 2019 số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ thỏa mãn $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2019}^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$S = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + \left|a_{2019} - a_1\right|.$$

Bài 3. *(5 điểm)* Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5, a_2 = 13$ và

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \text{ với mọi } n \geq 2.$$

a) Chứng minh rằng hai số hạng liên tiếp của dãy trên nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh rằng nếu p là ước nguyên tố của a_{2^k} thì $p-1$ chia hết cho 2^{k+1} với mọi số tự nhiên k.

Bài 4. *(5 điểm)* Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O) và trực tâm H. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng với O qua BC, CA, AB.

a) Gọi H_a là điểm đối xứng của H qua BC, và A' là điểm đối xứng của A qua O. Gọi O_a là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC. Chứng minh rằng $HD', A'O_a$ cắt nhau tại một điểm trên (O).

b) Lấy điểm X sao cho tứ giác $AXDA'$ là hình bình hành. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác AHX, ABF, ACE có một điểm chung khác A.

2. Đề thi ngày 2 (ngày 28/12/2019)

Bài 5. *(6 điểm)* Cho hệ phương trình (tham số a): $\begin{cases} x - ay = yz \\ y - az = zx \\ z - ax = xy \end{cases}$ (với $x, y, z \in \mathbb{R}$).

a) Giải hệ khi $a = 0$.

b) Chứng minh rằng hệ có 5 nghiệm khi $a > 1$.

Bài 6. *(7 điểm)* Cho tam giác ABC nhọn không cân có các đường cao AD, BE, CF với D, E, F là các chân đường cao. Đường tròn đường kính AD cắt DE, DF lần lượt tại M, N. Lấy các điểm P, Q tương ứng trên AB, AC sao cho $NP \perp AB, MQ \perp AC$. Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.

a) Chứng minh rằng (I) tiếp xúc với EF.

b) Gọi T là tiếp điểm của (I) với EF, K là giao điểm của DT, MN và L đối xứng với A qua MN. Chứng minh rằng (DKL) đi qua giao điểm của MN và EF.

Bài 7. *(7 điểm)* Cho số nguyên dương $n > 1$. Ký hiệu T là tập hợp tất cả các bộ có thứ tự (x, y, z) trong đó x, y, z là các số nguyên dương đôi một khác nhau và $1 \leq x, y, z \leq 2n$. Một tập hợp A các bộ có thứ tự (u, v) được gọi là "liên kết" với T nếu với mỗi phần tử $(x, y, z) \in T$ thì $\{(x, y), (x, z), (y, z)\} \cap A \neq \varnothing$.

a) Tính số phần tử của T.

b) Chứng minh rằng tồn tại một tập hợp liên kết với T có đúng $2n(n-1)$ phần tử.

c) Chứng minh rằng mỗi tập hợp liên kết với T có không ít hơn $2n(n-1)$ phần tử.

3. Lời giải chi tiết và bình luận

Bài 1. *Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = x_n + 3\sqrt{x_n} + \frac{n}{\sqrt{x_n}}$ với mọi $n \geq 1$.*

a) *Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{x_n} = 0$.*

b) *Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{x_n}$.*

Lời giải. a) Ta dự đoán $x_n > n^2, \forall n > 1$ và có thể chứng minh bằng quy nạp như sau.
Với $n = 2$, ta có $x_2 = 1 + 3\sqrt{1} + \frac{1}{\sqrt{1}} = 5 > 2^2$ nên khẳng định đúng.
Giả sử ta đã có $x_n > n^2$, khi đó

$$x_{n+1} > x_n + 3\sqrt{x_n} > n^2 + 3n \geq (n+1)^2.$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp thì khẳng định trên được chứng minh.
Từ đó suy ra $0 < \frac{n}{x_n} < \frac{1}{n}$, mà $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ nên theo nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{x_n} = 0$.

b) **Cách 1.** *(sử dụng định lý trung bình Cesaro – định lý Stolz)*
Đặt $x_n = y_n^2$ thì công thức đã cho viết lại thành $y_{n+1}^2 = y_n^2 + 3y_n + \frac{n}{y_n}$ nên

$$(y_{n+1} - y_n)(y_{n+1} + y_n) = 3y_n + \frac{n}{y_n}$$

hay

$$y_{n+1} - y_n = \frac{3y_n + \frac{n}{y_n}}{y_{n+1} + y_n} = \frac{3y_n + \frac{n}{y_n}}{\sqrt{y_n^2 + 3y_n + \frac{n}{y_n}} + y_n} = \frac{3 + \frac{n}{y_n^2}}{\sqrt{1 + \frac{3}{y_n} + \frac{n}{y_n^3}} + 1}.$$

Theo câu a thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{y_n} = 0$ nên kéo theo $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{y_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{y_n^3} = 0$ và dựa theo đẳng thức trên thì $\lim\limits_{n\to+\infty} (y_{n+1} - y_n) = \frac{3}{2}$. Theo định lý trung bình Cesaro thì dãy số (u_n) có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = L$.

Xét dãy $u_n = y_{n+1} - y_n$, áp dụng ta dễ dàng có được

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n}{n} = \frac{3}{2} \text{ nên } \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{x_n} = \frac{4}{9}.$$

Cách 2. *(dùng nguyên lý kẹp)* Trước hết, xét hiệu

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1)^2 - n^2} = \frac{3\sqrt{x_n} + \frac{n}{\sqrt{x_n}}}{2n+1} = \frac{3\sqrt{\frac{x_n}{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}}{2 + \frac{1}{n}},$$

ta thấy rằng nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n^2} = l$ thì theo định lý Stolz, ta phải có $l = \frac{3}{2}\sqrt{l} \to l = \frac{9}{4}$.

Nhờ dự đoán này, ta có thể thực hiện ước lượng để xây dựng BĐT và kẹp như sau: Vì $x_n > n^2$ nên $\frac{n}{\sqrt{x_n}} < 1$, từ đó dễ dàng chứng minh bằng quy nạp được

$$x_n < \frac{9}{4}n^2, \forall n \geq 2.$$

Sử dụng ước lượng $\sqrt{a-b} > \sqrt{a} - \frac{b}{\sqrt{a}}$ với $a > b > 0$, ta có

$$x_{n+1} > x_n + 3\sqrt{x_n} + \frac{2}{3} > \left(\sqrt{x_n} + \frac{3}{2}\right)^2 - 2$$

hay

$$\sqrt{x_{n+1}} > \sqrt{\left(\sqrt{x_n} + \frac{3}{2}\right)^2 - 2} > \sqrt{x_n} + \frac{3}{2} - \frac{2}{\sqrt{x_n} + \frac{3}{2}}.$$

Suy ra $\sqrt{x_{n+1}} > \sqrt{x_n} + \frac{3}{2} - \frac{2}{n}$ nên

$$\sqrt{x_{n+1}} > 1 + \frac{3n}{2} - 2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Mặt khác, dễ dàng chứng minh bằng quy nạp rằng

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \le \sqrt{n}, \forall n \ge 1$$

nên ta được $\frac{3n}{2} > \sqrt{x_{n+1}} > \frac{3n}{2} - 2\sqrt{n}$.

Theo nguyên lý kẹp, dễ dàng suy ra $\lim \frac{n^2}{x_n} = \frac{4}{9}$. □

Nhận xét. *Câu b có thể sử dụng định lý Stolz cho dãy (y_n) và dãy $z_n = n$ cũng thu được kết quả tương tự, vì thực ra định lý Stolz còn tổng quát hơn cả định lý trung bình Cesaro: Cho hai dãy số $(x_n), (y_n)$ có y_n dương, tăng, tiến tới vô cực và $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = L$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$. Dấu hiệu nhận biết định lý Stolz cho câu b là khá rõ. Nếu ở trên không thực hiện đặt dãy phụ thì vẫn có thể xét hiệu $\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}$. Tuy nhiên, nếu ta đi theo hướng xét trực tiếp dãy x_n và n^2 thì hơi khó, vì khi đó không dễ để tính trực tiếp được giới hạn sau (cũng khó có thể chứng minh được tính tăng/giảm của dãy $\frac{x_n}{n^2}$, dù trên thực tế, nó đúng là dãy tăng).*

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1)^2 - n^2} = \frac{3\sqrt{x_n} + \frac{n}{\sqrt{x_n}}}{2n+1}.$$

Dãy số theo dạng $u_{n+1} = u_n + u_n^\alpha$ và cả hai ý là không mới, tùy vào giá trị α, ta có thể ước lượng được "tốc độ" tăng của dãy này, xấp xỉ với n, n^2 hay $\frac{1}{n}, \ldots$

Một bài tương tự:

1. *(Đề tiêu thụ bài giảng trường Đông miền Nam 2019)* Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 > 0, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}, n = 1, 2, 3, \ldots$ Chứng minh rằng $\lim \frac{x_n^3}{n} = 3$.

2. *(VMO 2017 Mock test)* Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$u_1 = \frac{2017}{2016}, u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + \frac{n^2}{u_n} \text{ với } n \ge 1.$$

   a) Tính $\left[\sqrt{u_{2018}}\right]$.
   b) Chứng minh rằng $a_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}$ hội tụ.
   c) Chứng minh rằng $b_n = \frac{1}{u_1} + \frac{2}{u_2} + \cdots + \frac{n}{u_n} \to +\infty$.

3. Cho dãy số $a_1 > 0, a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$ với $n \geq 1$. Tính giới hạn của các dãy số sau $b_n = \frac{a_n}{n}$ và $c_n = a_n - n$.

4. *(Chọn đội tuyển Đồng Nai 2019)* Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n + \frac{2n}{\sqrt{x_n}}\right)$. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{(n-1)^2} < x_n < \sqrt[3]{n^2}, \forall n \geq 3$ và tính $\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{\sqrt[3]{n^2}-x_n}$.

Bài 2. *a) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 = 1$. Chứng minh rằng*

$$|a-b|+|b-c|+|c-a| \leq 2\sqrt{2}.$$

b) Cho 2019 số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ thỏa mãn $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2019}^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$S = |a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{2019}-a_1|.$$

Lời giải. **Nhận xét.** Theo BĐT Cauchy – Schwarz, ta luôn có

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n| \leq \sqrt{n\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)}.$$

a) Do tính đối xứng, ta có thể giả sử $a \leq b \leq c$ và đưa về

$$|a-b|+|b-c|+|c-a| = (a-b)+(b-c)+(a-c) = 2(a-c) \leq 2\sqrt{a^2+c^2} \leq 2\sqrt{2}.$$

BĐT được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

b) **Cách 1.** Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử a_1 là số nhỏ nhất. Ta xét các trường hợp sau:

1. Nếu dãy số $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ không giảm thì tổng các khoảng cách đã cho chính là hai lần khoảng cách giữa số đầu và số cuối, tức là

$$S = 2\left|a_1 - a_{2019}\right| \leq 2\sqrt{a_1^2+a_{2019}^2} \leq 2\sqrt{2}.$$

2. Ngược lại, trong dãy phải có một vị trí a_k với $1 < k < 2019$ mà $a_k \geq a_{k-1}$ và $a_k \leq a_{k+1}$ (tức là đơn điệu ngược chiều). Khi đó $|a_k - a_{k-1}| + |a_{k+1} - a_k| = |a_{k+1} - a_{k-1}|$. Như thế, ta đã loại bỏ được số a_k khỏi biểu thức S và ta đưa về bài toán chỉ có 2018 số thực như sau:
Cho 2018 số thực $b_1, b_2, \ldots., b_{2018}$ thỏa mãn $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{2019}^2 \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$S = |b_1-b_2|+|b_2-b_3|+\cdots+|b_{2018}-b_1|.$$

Suy ra

$$S \leq (|b_1|+|b_2|)+(|b_2|+|b_3|)+\cdots+(|b_{2018}|+|b_1|) = 2\sum_{1\leq i\leq 2018}|b_i| \leq 2\sqrt{2018}.$$

Đẳng thức xảy ra khi tất cả các trị tuyệt đối bằng nhau và các số liên tiếp trái dấu nhau. Do có chẵn số nên điều này có thể xảy ra được và ta chọn

$$b_1 = -b_2 = b_3 = -b_4 = \cdots = -b_{2018} = \frac{\sqrt{2018}}{2018}.$$

Vì thế nên trong bài toán ban đầu, ta cũng có $\max S = 2\sqrt{2018}$ và đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi

$$a_1 = -a_2 = a_3 = -a_4 = \cdots = -a_{2018} = \frac{\sqrt{2018}}{2018}, a_{2019} = 0.$$

Cách 2. Trước hết, ta có nhận xét:

$$|x-y| = 2\max\{x,y\} - (x+y).$$

Suy ra

$$\frac{S}{2} = \sum_{i=1}^{2019} \max\{a_i, a_{i+1}\} - \sum_{i=1}^{2019} a_i.$$

Rõ ràng $\max\{a_i, a_{i+1}\} = a_i$ hoặc a_{i+1} nên tổng trên có thể viết lại thành

$$\frac{S}{2} = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_{2019} a_{2019},$$

trong đó $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$. Ngoài ra, ta phải có $\sum\limits_{i=1}^{2019} \varepsilon_i = 0$ (do trong tổng ở trên có 2019 dấu $-$ và 2019 dấu $+$) nên trong các hệ số này, phải có ít nhất một hệ số bằng 0, vì nếu không thì vế trái là số lẻ, vô lý. Không mất tính tổng quát, giả sử $\varepsilon_{2019} = 0$. Suy ra

$$\frac{S}{2} \le \sum_{i=1}^{2018} \varepsilon_i a_i \le \sum_{i=1}^{2018} |a_i| \le \sqrt{2018}$$

nên $S \le 2\sqrt{2018}$. Đẳng thức xảy ra khi có 1009 số ε_i nhận giá trị là 1, còn 1009 số kia nhận giá trị là -1. Từ đây không khó để chỉ ra

$$a_1 = -a_2 = \cdots = a_{2017} = -a_{2018} = \frac{\sqrt{2018}}{2018} \text{ và } a_{2019} = 0.$$

$\square$

Nhận xét. *Câu a của bài toán là một gợi ý hiệu quả khi cho ba số (lẻ số) và kết quả là $2\sqrt{2}$. Nếu thay câu a gốc thành bài toán tìm GTLN ứng với 2020 số thì ta có thể thực hiện ngay BĐT Cauchy-Schwarz như trên và thu được kết quả là $2\sqrt{2020}$. Như thế thì bài toán này có thể đổi giả thiết từ $2019 \to n$ là số nguyên dương bất kỳ. Xét về bản chất của lời giải, ở trường hợp 2019 số, ta vẫn thực hiện được tương tự trên nhưng lại không thể chỉ ra dấu bằng theo kiểu ghép thành từng cặp đan dấu được.*

Một số bài toán tương tự

1. *(JBMO TST) Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 21$. Chứng minh rằng*

$$|a-2b| + |b-2c| + |c-2a| \le 7.$$

2. *Với các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thì ta có*

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \cdots + |x_n - x_1| \ge 2\max\left\{\left|x_i - x_j\right|, 1 \le i \le j \le n\right\}$$

3. *(Komal 2014) Với $n \geq 2$,cho các số thực $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ và $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ thỏa mãn điều kiện $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của*
   a) $\min\{|x_i - y_i|, 1 \leq i \leq n\}$.
   b) $P = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

Bài 3. *Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5, a_2 = 13$ và $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ với mọi $n \geq 2$.*

a) Chứng minh rằng hai số hạng liên tiếp của dãy trên nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh rằng nếu p là ước nguyên tố của a_{2^k} thì $p-1$ chia hết cho 2^{k+1} với mọi số tự nhiên k.

Lời giải. a) **Cách 1.** Ta thấy (a_n) là dãy sai phân tuyến tính cấp hai có phương trình đặc trưng $x^2 = 5x - 6$ với hai nghiệm là $x_1 = 2, x_2 = 3$ nên dễ dàng tìm được công thức tổng quát là

$$a_n = 2^n + 3^n,\ \forall n.$$

Đến đây, giả sử có $n \geq 1$ để a_n, a_{n+1} có ước nguyên tố chung là p. Rõ ràng $\gcd(p, 6) = 1$. Ta có

$$\begin{cases} p|2^n + 3^n \\ p|2^{n+1} + 3^{n+1} \end{cases} \to \begin{cases} p|3 \cdot 2^n + 3^{n+1} \\ p|2 \cdot 2^n + 3^{n+1} \end{cases} \to p|2^n,$$

vô lý vì $\gcd(p, 6) = 1$.

Cách 2. Vì $a_{n+2} \equiv 5a_{n+1} \pmod 6$ và $a_1 = 5, a_2 = 13$ nên các số hạng của dãy luôn nguyên tố cùng nhau với 6. Giả sử tồn tại số nguyên tố $p \geq 5$ để $p|a_n, a_{n+1}$ với $n \in \mathbb{Z}^+$. Suy ra

$$p|5a_n - 6a_{n-1} \to p|6a_n \to p|a_{n-1}.$$

Từ đó thực hiện liên tiếp thao tác này thì suy ra $p|a_1, a_2$, vô lý vì $\gcd(a_1, a_2) = 1$.

b) Xét số nguyên tố p là ước của $2^{2^k} + 3^{2^k}$. Suy ra $2^{2^k} \equiv -3^{2^k} (\bmod p) \to 2^{2^{k+1}} \equiv 3^{2^{k+1}} (\bmod p)$. Theo định lý Fermat nhỏ thì

$$2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Giả sử h là số nguyên dương nhỏ nhất để $2^h \equiv 3^h (\bmod p)$. Rõ ràng khi đó mọi số $h' \geq h$ thỏa mãn điều kiện này thì ta đều phải có $h|h'$. Thật vậy, Xét phép chia $h' = h \cdot t + r$ với $0 \leq r < h$ thì

$$2^{h'} \equiv 3^{h'} (\bmod p) \Leftrightarrow (2^h)^t \cdot 2^r \equiv (3^h)^t \cdot 3^r (\bmod p) \Leftrightarrow 2^r \equiv 3^r (\bmod p).$$

Do h là số nguyên dương nhỏ nhất nên ta phải có $r = 0$ và $h|h'$. Theo đề bài thì $h' = 2^{k+1}$ thỏa mãn nên ta có $h|2^{k+1}$, tức là $h = 2^x$ với $0 \leq x \leq k+1$. Giả sử rằng $x \leq k$ thì

$$2^x \equiv 3^x (\bmod p) \Rightarrow p|2^x - 3^x|2^{2^k} - 3^{2^k},$$

mâu thuẫn vì $p|2^{2^k} + 3^{2^k}$. Do đó, ta phải có $x = k+1$ và vì $h' = p-1$ thỏa mãn nên $2^{k+1}|p-1$. Ta có đpcm. □

Nhận xét. *Câu a là một kết quả nhẹ nhàng có thể thực hiện theo nhiều cách như trên. Câu b là một bổ đề quen thuộc về cấp của một số liên quan đến số Fermat: Mỗi ước nguyên tố p của số $2^{2^n}+1$ thì đều thỏa mãn $2^{n+1}|p-1$. Ta còn chứng minh được $2^{n+2}|p-1$. Trên thực tế, cặp số $(2,1)$ ở trên có thể đổi thành cặp (a,b) nguyên tố cùng nhau bất kỳ. Và có lẽ ý tưởng này đã được khai thác để xây dựng thành bài toán trong đề thi. Bài toán tương tự:*

1. *Chứng minh rằng hai số hạng liên tiếp của dãy Fiboacci (cũng như dãy Lucas) thì nguyên tố cùng nhau.*

2. *Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ thì ta luôn có:*
   a) Nếu a, b là cặp số nguyên dương và nguyên tố cùng nhau thì $2n \mid \varphi(a^n+b^n)$.
   b) Với mọi a nguyên dương thì $n|\varphi(a^n-1)$.

3. *(KHTN 2011) Cho dãy số (x_n) xác định bởi*

$$x_1=5, x_2=\frac{17}{2}, x_{n+1}=\frac{1}{4}x_nx_{n-1}^2-2x_n-4, \forall n\geq 1.$$

   a) Chứng minh rằng $2x_{n+1}=x_n^2-8$, từ đó chỉ ra rằng $x_n=2^{2^{n-1}+1}+2^{-2^{n-1}+1}$ với mọi n.
   b) Tìm tất cả các số nguyên dương n để $[x_n]+3$ là lập phương đúng.

Bài 4. *Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O) và trực tâm H. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng với O qua BC, CA, AB.*

a) Gọi H_a là điểm đối xứng của H qua BC, và A' là điểm đối xứng của A qua O. Gọi O_a là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC. Chứng minh rằng $HD', A'O_a$ cắt nhau tại một điểm trên (O).

b) Lấy điểm X sao cho tứ giác $AXDA'$ là hình bình hành. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác AHX, ABF, ACE có một điểm chung khác A.

Lời giải. a) Xét hình vẽ như bên dưới, các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Giả sử H_aD cắt (O) ở K. Gọi M là trung điểm BC thì $OD=2OM=AH$. Hai tam giác cân OBD và OO_aB có chung góc đáy O nên chúng đồng dạng, suy ra

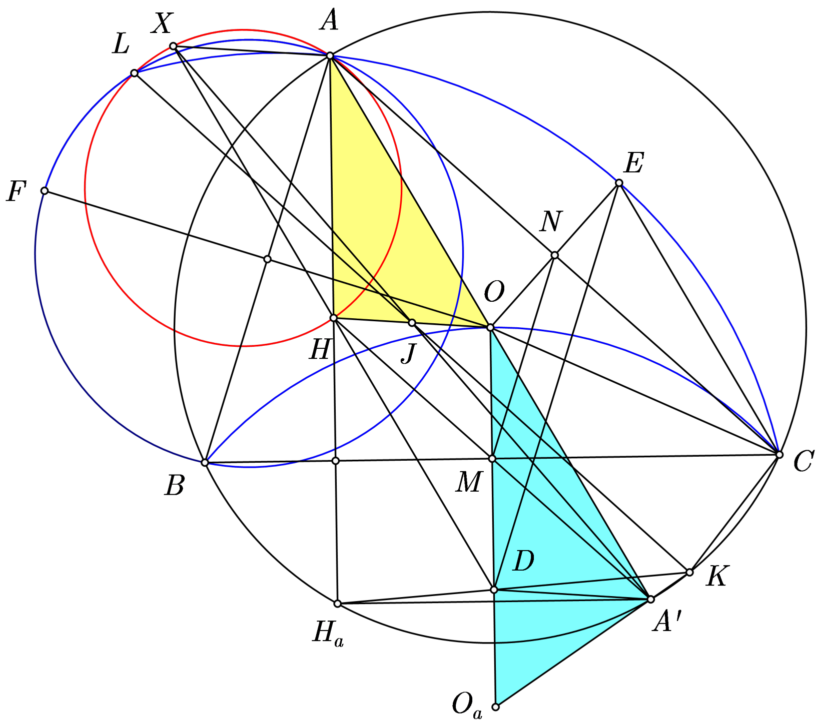
$$\frac{OD}{OB}=\frac{OB}{OO_a}\to OD\cdot OO_a=R^2$$

với R là bán kính (O).

Suy ra $AH\cdot OO_a=R^2$ nên $\frac{AH}{OA'}=\frac{OA}{OO_a}$, mà $\angle OAH=\angle A'OA_a$ nên hai tam giác $AHO, OA'O_a$ đồng dạng. Vì tứ giác OHH_aD là hình thang cân nên

$$\angle OA'O_a=\angle AHO=180^\circ-\angle AH_aK=180^\circ-\angle AA'K.$$

Vì thế nên O_a, A', K thẳng hàng, ta có đpcm.



b) Gọi J là trung điểm OH thì J là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Gọi L là điểm đối xứng với K qua J. Gọi N là trung điểm AC thì MN là đường trung bình của tam giác ODE. Biến đổi góc, ta có

$$\begin{aligned}\angle KDE &= \angle KDO - \angle ODE = \angle AH_aK - \angle OMN = 180^\circ - \angle ACK - \angle OCN \\ &= 180^\circ - \angle ECK.\end{aligned}$$

Suy ra tứ giác $DKCE$ nội tiếp. Ta biết rằng H, A' đối xứng nhau qua M nên tứ giác $OHDA'$ là hình bình hành. Suy ra

$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{A'O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DX}$$

nên H là trung điểm DX. Từ đó ta có X, A' đối xứng nhau qua J. Theo phép đối xứng tâm J thì:

$$X \longleftrightarrow A', A \longleftrightarrow D, H \longleftrightarrow O, L \longleftrightarrow K.$$

Mà A', D, O, K cùng thuộc một đường tròn (do $\angle OA'K = \angle AH_aD = \angle ODK$) nên các điểm X, A, H, L cũng cùng thuộc một đường tròn hay $X \in (AHL)$. Cũng theo phép đối xứng tâm trên thì A, L, F, B cũng cùng thuộc một đường tròn nên $L \in (AFB)$. Tương tự thì $L \in (ACE)$. Vì thế nên các đường tròn $(AHX), (ABE), (ACF)$ cùng đi qua điểm chung thứ hai là $L \neq A$. $\square$

Nhận xét. *Điểm K là giao điểm của (O) với đường thẳng đối xứng với đường thẳng Euler OH qua BC nên nó chính là điểm Anti-Steiner của tam giác ABC. Bài toán này là khó nhất của ngày 1 và ý b đòi hỏi phải có các bước xử lý khá cầu kỳ mới phát hiện ra được điểm đồng quy thứ hai của ba đường tròn.*

Bài toán vẫn còn nhiều cách tiếp cận khác như dùng phép nghịch đảo. Theo tính bình đẳng giữa các đỉnh tam giác, ta thấy rằng L còn nằm trên đường tròn (BCD).

Bài 5. *Cho hệ phương trình (tham số a):* $\begin{cases} x - ay = yz \\ y - az = zx \\ z - ax = xy \end{cases}$ *(với $x, y, z \in \mathbb{R}$).*

a) *Giải hệ khi $a = 0$.*

b) *Chứng minh rằng hệ có 5 nghiệm khi $a > 1$.*

Lời giải.
a) Với $a = 0$, ta có hệ

$$\begin{cases} x = yz \\ y = zx \\ z = xy \end{cases}.$$

Nếu một trong ba số bằng 0 thì kéo theo hai số còn lại cũng bằng 0. Xét $xyz \neq 0$ thì nhân các phương trình lại, vế theo vế, ta có $xyz = 1$ nên

$$x^2 = y^2 = z^2 = 1.$$

Từ đó, ta tìm được

$$(0,0,0), (1,1,1), (-1,-1,1)$$

và các hoán vị. Có tất cả 5 nghiệm phân biệt của hệ phương trình này.

b) Dễ thấy $x = y = z = 0$ đều thỏa mãn hệ. Với $a > 1$, trước hết ta thấy nếu một số bằng 0 thì sẽ kéo theo cả hai số kia bằng 0, vì thế nên có thể giả sử $xyz \neq 0$. Ý tưởng là tìm biểu thức đối xứng giữa các biến x, y, z.

Cách 1. Đặt $p = x + y + z, q = xy + yz + zx, r = xyz$, cộng các phương trình lại, vế theo vế, ta có $x + y + z - a(x + y + z) = xy + yz + zx$ nên $p(1-a) = q$. Nhân lần lượt mỗi phương trình 1, 2, 3 cho x, y, z, ta có

$$x^2 - axy = y^2 - ayz = z^2 - azx = xyz.$$

Cộng các phương trình vế theo vế, ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 - a(xy + yz + zx) = 3xyz \text{ nên } p^2 - 2q - aq = 3r.$$

Cuối cùng, bình phương các phương trình, vế theo vế rồi cộng lại, ta có

$$(x - ay)^2 + (y - az)^2 + (z - ax)^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$$

hay

$$(a^2 + 1)(p^2 - 2q) - 2aq = q^2 - 2pr.$$

Rút điều kiện $q = p(1-a)$ ở trên, thế xuống phương trình dưới, ta có $p^2 + ap(a-1)(a+2) = 3r$ và $(a^2+1)(p^2 - 2p(1-a)) = p^2(a-1)^2 - 2pr$. Từ đó ta có hệ điều kiện

$$p^2 + p(a-1)(a+2) = 3r \text{ và } (a^2+1)(p + 2a - 2) + 2a(a-1) - p(a-1)^2 = -2r$$

Giải ra, ta có $(p, q, r) = (0,0,0)$ hoặc $(3(1-a), 3(a-1)^2, (1-a)^3)$, hoặc $(-a^2 - a - 1, a^3 - 1, a^2 + a + 1)$. Ta xét các trường hợp

1. Nếu $(p,q,r) = (0,0,0)$ thì $x = y = z = 0$, đã xét ở trên.
2. Nếu $(p,q,r) = (3(1-a), 3(a-1)^2, (1-a)^3)$ thì do $p^2 \geq 3q$ nên đẳng thức phải xảy ra, ta tìm được $x = y = z = 1-a$.
3. Cuối cùng với $(p,q,r) = (-a^2-a-1, a^3-1, a^2+a+1)$ thì theo định lý Viete, các số x,y,z là nghiệm của phương trình bậc 3 biến t là

$$t^3 + (a^2+a+1)t^2 + (a^3-1)t - (a^2+a+1) = 0.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + (a^2+a+1)t^2 + (a^3-1)t - (a^2+a+1)$ thì

$$f(0) = -(a^2+a+1) < 0, f(-2a) = 2a^4 - 4a^3 + 3a^2 + a - 1 > 0, \forall a > 1$$

nên theo định lý hàm liên tục thì phương trình sẽ có ba nghiệm thực phân biệt α, β, γ trên các khoảng $(-\infty; -2a), (-2a; 0), (0; +\infty)$. Theo trên thì hệ sẽ có 2 nghiệm âm và 1 nghiệm dương; do đó, trong hoán vị $3! = 6$ bộ nghiệm của đa thức này, ta chỉ nhận đúng 3 nghiệm thỏa mãn các điều kiện sau

$$x < 0, y < 0, z > 0 \text{ và } x < 0, y > 0, z < 0 \text{ và } x > 0, y < 0, z < 0.$$

Vậy hệ đã cho có 5 nghiệm là

$$(0,0,0), (1-a, 1-a, 1-a) \text{ và } (\alpha, \beta, \gamma)$$

với các dấu được chọn như trên.

Cách 2. Ngoài cách biến đổi như trên, ta có thể thực hiện theo hướng khác, đỡ "cơ bắp" hơn như sau: Bỏ qua trường hợp $x = y = z = 0$, rõ ràng nếu có hai số bằng nhau thì ta suy ra được cả ba số bằng nhau và bằng $1-a$. Ta xét $xyz(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$ và biến đổi như sau:

$$a = \frac{x-yz}{y} = \frac{y-zx}{z} = \frac{(x-y)(z+1)}{y-z}.$$

Xây dựng các đẳng thức tương tự và nhân lại, ta có được $(x+1)(y+1)(z+1) = a^3$. Suy ra $p+q+r = a^3-1$. Lại có

$$(a+x)(a+y)(a+z) = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1$$

nên $a^2p + aq + r = 1 - a^3$. Đến đây có thể tính được p,q,r theo a nhẹ nhàng hơn nhiều. Sau đó, giải tiếp tương tự như trên. □

Nhận xét. *Ở bài toán này, ý a có thể nói là không thể không làm được. Tuy nhiên, ý b lại đòi hỏi phải tính toán khá chắc tay. Nếu ta biến đổi rút các biến thế "chồng chéo" vào nhau rồi đưa về một phương trình bậc cao rất khó để chỉ ra nó có đủ 5 nghiệm. Ý tưởng đối xứng hóa ở đây cũng tương đối tự nhiên. Đây là một bài đại số ứng dụng đa thức rất mới mẻ và thú vị.*

Dưới đây là một đề tương tự (lấy ý tưởng từ "dấu bằng" trong BĐT Vasile Cirtoaje). Xin gửi đầy đủ cả đề lẫn lời giải để mọi người thấy được hiệu quả của tính đối xứng hóa:

Cho x,y,z là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$x^2 - xy + yz = y^2 - yz + zx = z^2 - zx + xy.$$

Đặt $T = \frac{(x+y+z)^3}{xyz}$. Chứng minh rằng $T = 27$ hoặc $T = 49$.

Chứng minh. Đặt $A = x^2 - xy + yz, B = y^2 - yz + zx, C = z^2 - zx + xy$ thì $A + B + C = x^2 + y^2 + z^2$ và

$$\begin{aligned}
&A^2 + B^2 + C^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2(x^3y + y^3z + z^3x) \\
&= (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^3y + y^3z + z^3x) = (A + B + C)^2 - 2(x^3y + y^3z + z^3x) \\
&\Leftrightarrow AB + BC + CA = x^3y + y^3z + z^3x
\end{aligned}$$

Do $A = B = C$ nên $(A + B + C)^2 = 3(AB + BC + CA) \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 3(x^3y + y^3z + z^3x)$. Đặt $a = x + y + z, b = xy + yz + zx, c = xyz$ và $A = B = C = k^2$. Suy ra $3k^2 = x^2 + y^2 + z^2$ hay $a^2 - 2b = 3k^2$. Ta cũng có

$$x^4 - x^3y + x^2yz = k^2x^2, y^4 - y^3z + xy^2z = k^2y^2, z^4 - z^3x + xyz^2 = k^2z^2$$

nên
$$x^4 + y^4 + z^4 - (x^3y + y^3z + z^3x) + xyz(x + y + z) = 3k^4$$

Theo (*) thì $3(x^3y + y^3z + z^3x) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 9k^4$ nên $x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) = 6k^4 \Leftrightarrow -2b^2 + 5ca = 3k^4$. Mặt khác, ta cũng có

$$\begin{cases} x^2yz - xy^2z + y^2z^2 = k^2yz \\ y^2zx - xyz^2 + z^2x^2 = k^2zx \\ z^2xy - x^2yz + x^2y^2 = k^2xy \end{cases}$$

Suy ra $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = k^2(xy + yz + zx) \Leftrightarrow b^2 - 2ca = bk^2$, ta có hệ

$$\begin{cases} a^2 - 2b = 3k^2 \\ 2b^2 - 5ca = 3k^4 \\ b^2 - 2ca = bk^2 \end{cases}.$$

Từ đẳng thức thứ 2 và 3, ta có $b^2 = 5bk^2 - 6k^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 3k^2 \\ b = 2k^2 \end{array}\right.$. Ta xét 2 trường hợp

1. Nếu $b = 3k^2$ thì $a^2 = 9k^2$ và $ca = 3k^4$. Do đó $T = \frac{a^3}{c} = \frac{a^4}{ac} = \frac{81k^4}{3k^4} = 27$.

2. Nếu $b = 2k^2$ thì $a^2 = 7k^2$ và $ca = k^4$. Do đó $T = \frac{a^3}{c} = \frac{a^4}{ac} = \frac{49k^4}{k^4} = 49$.

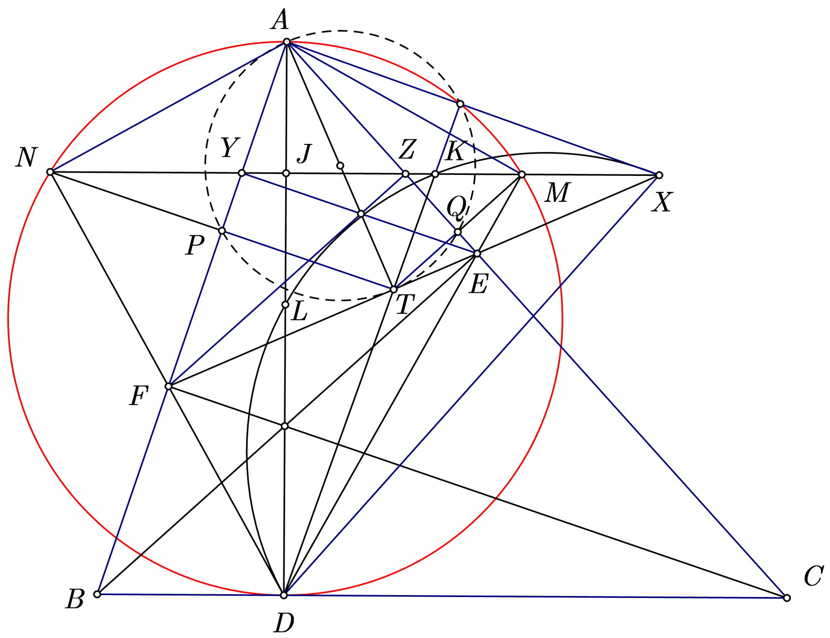
Vậy giá trị của biểu thức T là 27 hoặc 49. □

Bài 6. *Cho tam giác ABC nhọn không cân có các đường cao AD, BE, CF với D, E, F là các chân đường cao. Đường tròn đường kính AD cắt DE, DF lần lượt tại M, N. Lấy các điểm P, Q tương ứng trên AB, AC sao cho $NP \perp AB, MQ \perp AC$. Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.*

a) Chứng minh rằng (I) tiếp xúc với EF.

b) Gọi T là tiếp điểm của (I) với EF, K là giao điểm của DT, MN và L đối xứng với A qua MN. Chứng minh rằng (DKL) đi qua giao điểm của MN và EF.

Lời giải. a) Gọi T là hình chiếu của A lên EF. Ta thấy rằng FC là phân giác trong của góc $\angle DFE$ nên hai tia FM, FT đối xứng nhau qua AB. Mặt khác, $\angle FNA = \angle FTA = 90°$ nên N, T đối xứng nhau qua AB. Suy ra N, P, T thẳng hàng và $TP \perp AB$. Tương tự thì $TQ \perp AC$ và T, M, Q thẳng hàng.



Từ đó dễ thấy rằng AT chính là đường kính của (I), mà $AT \perp EF$ nên EF tiếp xúc (I).

b) Gọi X, Y, Z, J lần lượt là giao điểm của MN với EF, AB, AC, AD. Theo tính chất quen thuộc thì hai điểm N, M đối xứng với chân đường cao T qua AE, AF thì MN sẽ đi qua chân đường cao đỉnh E, F của tam giác AEF. Suy ra $EY \perp AB$, $FZ \perp AC$. Ngoài ra, theo tính đối xứng thì ta cũng có AD là trung trực MN nên J là trung điểm MN.

Do đó $D(EF, TX) = -1$. Chiếu lên MN, ta có $(MN, KX) = -1$. Theo hệ thức Newton cho hàng điểm điều hòa trên thì

$$\overline{JK} \cdot \overline{JX} = JM^2 = JN^2 = -\overline{JA} \cdot \overline{JD} = \overline{JL} \cdot \overline{JD}.$$

Suy ra tứ giác $DLKS$ nội tiếp. Ta có đpcm. □

Nhận xét. *Mô hình của bài toán khai thác khá mới mẻ nhưng không khó. Có nhiều cách tiếp cận để chứng minh ý b, theo kiểu tính toán hệ thức lượng hoặc biến đổi góc. Hướng xử lý theo kiểu dùng hàng điểm điều hòa như trên khá nhẹ nhàng và đẹp mắt.*

Nếu quan sát kỹ, ta thấy bản chất các điểm M, N chính là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp (A) của tam giác DEF lên các cạnh DE, DF. Ta còn chứng minh được DK, AX cùng đi qua điểm chung khác A của (I) và đường tròn đường kính AD.

Bài 7. *Cho số nguyên dương $n > 1$. Ký hiệu T là tập hợp tất cả các bộ có thứ tự (x, y, z) trong đó x, y, z là các số nguyên dương đôi một khác nhau và $1 \le x, y, z \le 2n$. Một tập hợp A các bộ có thứ tự (u, v) được gọi là "liên kết" với T nếu với mỗi phần tử $(x, y, z) \in T$ thì $\{(x, y), (x, z), (y, z)\} \cap A \ne \varnothing$.*

a) *Tính số phần tử của T.*

b) *Chứng minh rằng tồn tại một tập hợp liên kết với T có đúng $2n(n-1)$ phần tử.*

c) *Chứng minh rằng mỗi tập hợp liên kết với T có không ít hơn $2n(n-1)$ phần tử.*

Lời giải. a) Ta thấy rằng số bộ có thứ tự $(x,y,z)\in T$ chính là số chỉnh hợp chập 3 của $2n$ và là

$$|T| = A_{2n}^3 = 2n(2n-1)(2n-2).$$

b) Xét tập hợp

$$A = \{(i,j): 1\le i,j\le n, i\neq j\}\cup\{(i,j): n+1\le i,j\le 2n, i\neq j\}.$$

Rõ ràng $|A| = 2\cdot A_n^2 = 2n(n-1)$. Hơn nữa, với mọi $(x,y,z)\in T$ thì luôn tồn tại hai trong ba số x,y,z cùng thuộc một tập $\{1,2,\ldots,n\}$ hoặc $\{n+1,n+2,\ldots,2n\}$. Không mất tính tổng quát, giả sử x,y cùng thuộc một trong hai tập trên. Do cách chọn A nên $(x,y)\in A$ và dẫn đến $\{(x,y),(x,z),(y,z)\}\cap A\neq\varnothing$.

c) Xét graph đơn vô hướng $G_1=(V,E_1)$ trong đó V là tập đỉnh đại diện cho các số $1,2,\ldots,2n$ còn E_1 là tập cạnh; trong đó hai đỉnh $u>v$ được nối với nhau nếu trong tập hợp A liên kết với T không có cặp có thứ tự (u,v).

Khi đó, theo giả thiết thì với ba số x,y,z thì phải có ít nhất một cặp thuộc A; vì nếu không, giả sử có cạnh nối cả ba đỉnh x,y,z thì không mất tính tổng quát, giả sử $x>y>z$ nên G_1 chứa cả ba cạnh $(x,y),(x,z),(y,z)$ đồng nghĩa với việc khi xét bộ (x,y,z) thì cả ba cặp có thứ tự trên không thuộc T, mâu thuẫn.

Suy ra G_1 không chứa tam giác. Theo định lý Mantel – Turan thì số cạnh của nó sẽ không vượt quá $\frac{(2n)^2}{4}=n^2$. Từ đó suy ra số cạnh trong graph bù sẽ ít nhất là

$$C_{2n}^2 - n^2 = n(n-1).$$

Điều này có nghĩa là có ít nhất $n(n-1)$ cặp (u,v) mà $u>v$ thuộc A.

Chứng minh tương tự thì cũng có ít nhất $n(n-1)$ cặp (u,v) mà $u<v$ thuộc A (ta chỉ cần xét graph $G_2=(V,E_2)$ với quan hệ trong E_2 là: hai đỉnh $u<v$ được nối với nhau nếu trong tập hợp A liên kết với T không có cặp có thứ tự (u,v)). Từ đó suy ra trong T có ít nhất $2n(n-1)$ cặp, ta có đpcm. □

Nhận xét. *Bài toán này thực ra là một cách phát biểu của khéo léo, che giấu đi bản chất vấn đề của định lý Mantel – Turan. Quan hệ "không có tam giác" phát biểu thông qua ràng buộc khá rõ, nhưng cần phải xử lý cẩn thận, vì đề cho quan hệ có hướng (trong khi định lý chỉ áp dụng được cho graph vô hướng). Ta phát biểu rõ ràng lại định lý này cho trường hợp* 3, 4 *như sau:*

(Mantel – Turan) Một graph $G=(V,E)$ có $|V|=n$ và không có 3 đỉnh đôi một nối nhau thì số cạnh $|E|\le\frac{n^2}{4}$; còn nếu không có 4 *đỉnh đôi một nối với nhau thì số cạnh $|E|\le\frac{n^2}{3}$.*

Trên thực tế, câu b chỉ là một cách xây dựng ví dụ cho dấu bằng xảy ra ở định lý này. Còn câu c có thể chứng minh trực tiếp bằng quy nạp. Một số bài toán tương tự:

1. *(Trung Quốc 2017) Một CLB gồm có* 100 *thành viên mà trong* 4 *người bất kỳ thì đều có ít nhất một cặp quen nhau. Chứng minh rằng có một người quen ít nhất* 33 *người khác.*

2. *(Nga, 2010) Một quốc gia có 2019 thành phố, ban đầu giữa các thành phố chưa có đường. Người ta muốn xây dựng một số con đường nối trực tiếp giữa các thành phố sao cho: Nếu có đường đi từ A đến B và có đường đi từ B đến C thì không có đường đi từ A đến C. Hỏi có thể xây dựng được nhiều nhất bao nhiêu nếu như:*
a) Đường đi ở trên là 2 chiều (đi được từ X đến Y thì cũng đi được từ Y đến X)?
b) Đường đi ở trên là 1 chiều (đi được từ X đến Y thì không đi được từ Y đến X)?

3. *(Mock test VMO 2020) Cho họ Ω gồm m tập con phân biệt, khác rỗng của tập hợp $\{1, 2, \dots, 90\}$. Hai tập hợp trong Ω được gọi là liên kết nếu giao của chúng có đúng 1 phần tử; còn hai tập hợp được gọi là thân thiết nếu giao của chúng là một dãy các số tự nhiên liên tiếp có ít nhất 2 phần tử.*
a) Biết rằng trong Ω, 2 tập hợp bất kỳ đều thân thiết, chứng minh $m \leq 2025$.
b) Biết rằng có thể xếp các tập hợp của họ Ω thành một dãy liên tiếp sao cho hai tập hợp kề nhau đều liên kết và mỗi bộ hai số nguyên a, b với $1 \leq a < b \leq 90$ thì đều tồn tại không quá một tập con trong Ω chứa nó. Tìm giá trị lớn nhất của m.

4. *(VMO 2017) Bảng ô vuông $ABCD$ kích thước 2017×2017 gồm 2017^2 ô vuông đơn vị, mỗi ô vuông đơn vị được tô bởi một trong ba màu: đen, trắng, xám. Một cách tô màu được gọi là đối xứng nếu mỗi ô có tâm trên đường chéo AC được tô màu xám và mỗi cặp ô đối xứng qua AC được tô cùng màu đen hoặc cùng màu trắng. Người ta điền vào mỗi ô xám số 0, mỗi ô trắng một số nguyên dương và mỗi ô đen một số nguyên âm. Một cách điền số như vậy được gọi là k—cân đối (với k nguyên dương) nếu thỏa mãn điều kiện sau:*
• Mỗi cặp ô đối xứng qua AC được điền cùng một số nguyên thuộc đoạn $[-k, k]$.
• Nếu hàng và cột giao nhau tại ô đen thì tập các số nguyên dương được điền trên hàng đó và tập các số nguyên dương được điền trên cột đó không giao nhau; nếu hàng và cột giao nhau tại ô trắng thì tập các số nguyên âm được điền trên hàng đó và tập các số nguyên âm được điền trên cột đó không giao nhau.

   Tìm giá trị nhỏ nhất của k để với mọi cách tô màu đối xứng, luôn tồn tại cách điền số k cân đối.