BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2020 - 2021

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi thứ nhất: **25/12/2020**

Bài 1 (5,0 *điểm*)

Cho dãy số thực (x_n) có $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ và $x_{n+1} = 3x_n^2 - 2nx_n^3$ với mọi $n \geq 1$.

a) Chứng minh $\lim x_n = 0$.

b) Với mỗi $n \geq 1$ đặt $y_n = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$. Chứng minh rằng dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 2 (5,0 *điểm*)

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)f(y) = f(xy-1) + xf(y) + yf(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3 (5,0 *điểm*)

Cho tam giác nhọn không cân ABC có trực tâm H và D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C. Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF với tâm I và K, J lần lượt là trung điểm BC, EF. Cho HJ cắt lại (I) tại G, GK cắt lại (I) tại L.

a) Chứng minh rằng AL vuông góc với EF.

b) Cho AL cắt EF tại M, IM cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác IEF tại N, DN cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng PE, QF, AK đồng quy.

Bài 4 (5,0 *điểm*)

Với số nguyên $n \geq 2$, gọi $s(n)$ là tổng các số nguyên dương không vượt quá n và không nguyên tố cùng nhau với n.

a) Chứng minh $s(n) = \frac{n}{2}\big(n + 1 - \varphi(n)\big)$, trong đó $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n.

b) Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên $n \geq 2$ thỏa mãn $s(n) = s(n + 2021)$.

-------------------- HẾT --------------------

* *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*

* *Giám thị không giải thích gì thêm.*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2020 - 2021

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi thứ hai: **26/12/2020**

Bài 5 (6,0 *điểm*)

Cho đa thức $P(x) = a_{21}x^{21} + a_{20}x^{20} + \cdots + a_1x + a_0$ có các hệ số thuộc $[1011, 2021]$. Biết rằng $P(x)$ có nghiệm nguyên và c là một số dương sao cho $|a_{k+2} - a_k| \le c$ với mọi $k \in \{0, 1, \ldots, 19\}$.

a) Chứng minh rằng $P(x)$ có đúng một nghiệm nguyên.

b) Chứng minh $\sum_{k=0}^{10}(a_{2k+1} - a_{2k})^2 \le 440c^2$.

Bài 6 (7,0 *điểm*)

Một học sinh chia tất cả 30 viên bi vào 5 cái hộp được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 (sau khi chia có thể có hộp không có viên bi nào).

a) Hỏi có bao nhiêu cách chia các viên bi vào các hộp (hai cách chia là khác nhau nếu có một hộp có số bi trong hai cách chia là khác nhau)?

b) Sau khi chia, học sinh này sơn 30 viên bi đó bởi một số màu (mỗi viên được sơn đúng một màu, một màu có thể sơn cho nhiều viên bi), sao cho không có 2 viên bi nào trong cùng một hộp có màu giống nhau và từ 2 hộp bất kì không thể chọn ra được 8 viên bi được sơn bởi 4 màu. Chứng minh rằng với mọi cách chia, học sinh đều phải dùng không ít hơn 10 màu để sơn bi.

c) Hãy chỉ ra một cách chia sao cho với đúng 10 màu học sinh có thể sơn bi thỏa mãn các điều kiện ở câu b).

Bài 7 (7,0 *điểm*)

Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là giao điểm hai tiếp tuyến của (O) tại B và C. Đường tròn đi qua A và tiếp xúc với BC tại B cắt trung tuyến đi qua A của tam giác ABC tại G. Cho BG, CG lần lượt cắt CD, BD tại E, F.

a) Đường thẳng đi qua trung điểm của BE và CF lần lượt cắt BF, CE tại M, N. Chứng minh rằng các điểm A, D, M, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Cho AD, AG lần lượt cắt lại đường tròn ngoại tiếp các tam giác DBC, GBC tại H, K. Trung trực của HK, HE, HF lần lượt cắt BC, CA, AB tại R, P, Q. Chứng minh rằng các điểm R, P, Q thẳng hàng.

------------------- HẾT -------------------

* *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
* *Giám thị không giải thích gì thêm.*

Lời giải và bình luận đề thi VMO 2020

Nguyễn Tăng Vũ - Lê Phúc Lữ - Nguyễn Công Thành

§1 Đề thi ngày 1 (ngày 25/12/2020)

Bài 1 (5 điểm)**.** Cho dãy số thực (x_n) có $x_1 \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ và $x_{n+1} = 3x_n^2 - 2nx_n^3$ với mọi $n \geq 1$.

a) Chứng minh $\lim x_n = 0$.

b) Với mỗi $n \geq 1$ đặt $y_n = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$. Chứng minh rằng dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 2 (5 điểm)**.** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) f(y) = f(xy - 1) + xf(y) + yf(x)$$

với mọi số thực x, y.

Bài 3 (5 điểm)**.** Cho tam giác nhọn không cân ABC có trực tâm H và D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C. Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF với tâm I và K, J lần lượt là trung điểm BC, EF. Cho HJ cắt lại (I) tại G, GK cắt lại (I) tại L.

a) Chứng minh rằng AL vuông góc với EF.

b) Cho AL cắt EF tại M, IM cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác IEF tại N, DN cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng PE, QF, AK đồng quy.

Bài 4 (5 điểm)**.** Với số nguyên $n \geq 2$, gọi $s(n)$ là tổng các số nguyên dương không vượt quá n và không nguyên tố cùng nhau với n.

a) Chứng minh $s(n) = \dfrac{n}{2}(n + 1 - \phi(n))$, trong đó $\phi(n)$ là số các số nguyên dương không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n.

b) Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên $n \geq 2$ thỏa mãn $s(n) = s(n + 2021)$.

§2 Đề thi ngày 2 (ngày 26/12/2020)

Bài 5 (6 điểm)**.** Cho đa thức $P(x) = a_{21}x^{21} + a_{20}x^{20} + \cdots + a_1x + a_0$ có các hệ số thuộc $[1011, 2021]$. Biết rằng $P(x)$ có nghiệm nguyên và c là một số dương sao cho $|a_{k+2} - a_k| \leq c$ với mọi $k \in \{0, 1, \ldots, 19\}$.

a) Chứng minh rằng $P(x)$ có đúng một nghiệm nguyên.

b) Chứng minh $\sum_{k=0}^{10} (a_{2k+1} - a_{2k})^2 \le 440c^2$.

Bài 6 (7 điểm)**.** Một học sinh chia tất cả 30 viên bi vào 5 cái hộp được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 (sau khi chia có thể có hộp không có viên bi nào).

a) Hỏi có bao nhiêu cách chia các viên bi vào các hộp (hai cách chia là khác nhau nếu có một hộp có số bi trong hai cách chia là khác nhau)?

b) Sau khi chia, học sinh này sơn 30 viên bi đó bởi một số màu (mỗi viên được sơn đúng một màu, một màu có thể sơn cho nhiều viên bi), sao cho không có 2 viên bi nào trong cùng một hộp có màu giống nhau và từ hai hộp bất kì không thể chọn ra được 8 viên bi được sơn bởi 4 màu. Chứng minh rằng với mọi cách chia, học sinh đều phải dùng không ít hơn 10 màu để sơn bi.

c) Hãy chỉ ra một cách chia sao cho với đúng 10 màu, học sinh có thể sơn bi thỏa mãn các điều kiện ở câu b).

Bài 7 (7 điểm)**.** Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là giao điểm hai tiếp tuyến của (O) tại B và C. Đường tròn đi qua A và tiếp xúc với BC tại B cắt trung tuyến đi qua A của tam giác ABC tại G. Cho BG, CG lần lượt cắt CD, BD tại E, F.

a) Đường thẳng đi qua trung điểm của BE và CF lần lượt cắt BF, CE tại M, N. Chứng minh rằng các điểm A, D, M, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Cho AD, AG lần lượt cắt lại đường tròn ngoại tiếp các tam giác DBC, GBC tại H, K. Trung trực của HK, HE, HF lần lượt cắt BC, CA, AB tại R, P, Q. Chứng minh rằng các điểm R, P, Q thẳng hàng.

§3 Lời giải chi tiết và bình luận

Bài 1

Cho dãy số thực (x_n) có $x_1 \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ và $x_{n+1} = 3x_n^2 - 2nx_n^3$ với mọi $n \geq 1$.

a) Chứng minh $\lim x_n = 0$.

b) Với mỗi $n \geq 1$ đặt $y_n = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$. Chứng minh rằng dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải.

a) Ta sẽ chứng minh $0 < x_n < \dfrac{1}{2(n-1)}$ với mọi $n \geq 2$ bằng quy nạp. Thật vậy, ta có $x_2 = 3x_1^2 - 2x_1^3 = x_1^2(3 - 2x_2) \leq$ nên xét $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ trên $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, ta có $f'(x) = 6x(1-x) \geq 0$ với mọi $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, nên $0 = f(0) < (x_n) < f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, hay $0 < x_2 < \dfrac{1}{2}$.

Giả sử $0 < x_n < \dfrac{1}{2(n-1)}$ với $n \geq 2$. Xét $g(x) = 3x^2 - 2nx^3$ trên $\left[0, \dfrac{1}{2(n-1)}\right]$, ta có $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2(n-1)} \leq \dfrac{1}{n}$ nên $g'(x) = 6x(1-nx) \geq 0$, suy ra

$$0 = g(0) < g(x_n) < g\left(\frac{1}{2(n-1)}\right).$$

Mà

$$\frac{1}{2n} - g\left(\frac{1}{2(n-1)}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{2n-3}{4(n-1)^3} = \frac{(n-2)(2n^2-4n+1)}{4n(n-1)^3} \geq 0$$

với mọi $n \geq 2$ nên ta suy ra $0 < g(x_n) < \dfrac{1}{2n}$, hay $0 < x_{n+1} < \dfrac{1}{2n}$. Theo nguyên lí quy nạp, ta có $0 < x_n < \dfrac{1}{2(n-1)}$ với mọi $n \geq 2$.

Từ đó, cho $n \to +\infty$, áp dụng nguyên lí kẹp ta có ngay $\lim x_n = 0$.

b) Từ câu trên, ta thấy $3 - 2nx_n > 3 - \dfrac{2n}{2(n-1)} > 0$ với mọi $n \geq 2$ nên theo bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$x_{n+1} = x_n^2(3 - 2nx_n) = \frac{1}{n^2}(nx_n)^2(3 - 2nx_n) \leq \frac{1}{n^2}\left(\frac{nx_n + nx_n + 3 - 2x_n}{3}\right)^3 = \frac{1}{n^2}$$

với mọi $n \geq 2$. Vì $(n-1)^4 - 3(n+1)^3$ là một đa thức bậc 4 theo biến n nên tồn tại số tự nhiên $m > 2$ đủ lớn để $(n-1)^4 > 3(n+1)^3$ với mọi $n > m$. Lúc này, với mỗi $n > m$, ta có

$$x_{n+1} < 3x_n^2 < \frac{3}{(n-1)^4} < \frac{1}{(n+1)^3}.$$

Từ đó ta có

$$y_n < \sum_{k=1}^{m}(kx_k) + \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

với mọi $n > m$.

Tuy nhiên

$$\begin{aligned}\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} &< \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\\ &< 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}\\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= 2 - \frac{1}{n+1} < 2\end{aligned}$$

nên ta có $y_n < \sum\limits_{k=1}^{m}(kx_k) + 2$ với mọi $n > m$, tức là (y_n) bị chặn trên. Mặt khác, dễ thấy (y_n) là dãy tăng ngặt nên theo định lý Weierstrass, ta có (y_n) hội tụ.

$\square$

Nhận xét. Ở câu a, ta còn cách đánh giá khác là chỉ ra $x_n \le \frac{1}{2^n}$. Hướng xử lý này có thể thực hiện tương tự bằng quy nạp, và ở câu b, chỉ cần ước lượng đơn giản chuyển từ $2^n \to n^3$ là được.

Bài 2

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)f(y) = f(xy-1) + xf(y) + yf(x)$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)f(y) = f(xy-1) + xf(y) + yf(x)$$

với mọi số thực x, y.
Thế $y = 0$ vào đẳng thức trên, ta có

$$f(x)f(0) = f(-1) + xf(0).$$

Vì vậy nếu $f(0) \neq 0$ thì $f(x)$ phải có dạng $x + k$, với k là số thực nào đó. Tuy nhiên, khi đó hệ số của xy trong vế trái của phương trình đề cho là 1, trong khi hệ số của xy ở vế phải là 3, vô lí. Vậy $f(0) = 0$, do đó từ đẳng thức trên, ta cũng có $f(-1) = 0$.
Từ đó, thế $y = -1$ vào phương trình đề cho, ta suy ra $f(x) = f(-x-1)$. Với tính chất này, thế y bởi $-y-1$ vào phương trình đề cho, ta thu được

$$f(x)f(y) = f(xy+x) + xf(y) + (-y-1)f(x).$$

Đối chiếu đẳng thức trên với phương trình đề cho, ta có

$$f(xy+x) = f(xy-1) + (2y+1) f(x).$$

Từ đẳng thức này, với mỗi $x \neq 0$, thế y bởi $\frac{1}{x}$ ta có

$$f(x+1) = \left(\frac{2}{x}+1\right) f(x) \tag{1}$$

với mọi $x \neq 0$.
Thế x bởi $x+1$, y bởi 1 vào phương trình đề cho, ta có

$$f(x+1) f(1) = f(x) + (x+1) f(1) + f(x+1),$$

hay là

$$(f(1)-1) f(x+1) = f(x) + f(1)(x+1). \tag{2}$$

Tiếp tục thế $x = y = 1$ vào phương trình đề cho, ta có $f(1)^2 = 2f(1)$ nên $f(1) = 0$ hoặc $f(1) = 2$.

- Nếu $f(1) = 0$ thì kết hợp (2) và (1) ta có

  $$-f(x) = f(x+1) = \left(\frac{2}{x}+1\right) f(x)$$

  với mọi $x \neq 0$. Từ đó, với chú ý $f(0) = 0$ ta suy ra $f(x) \equiv 0$.

- Nếu $f(1) = 2$ thì cũng từ (2) và (1) ta có

  $$f(x) + 2(x+1) = f(x+1) = \left(\frac{2}{x}+1\right) f(x)$$

  với mọi $x \neq 0$. Suy ra $f(x) = x(x+1)$ với mọi $x \neq 0$. Mà $f(0) = 0$ nên $f(x) = x(x+1)$ với mọi x.

Thay lại vào phương trình đề cho, dễ thấy $f(x) \equiv 0$ và $f(x) = x(x+1)$ đều thỏa mãn yêu cầu. $\square$

> **Nhận xét.** Ngoài cách xử lý như trên, ta có thể đặt $g(x) = f(x) - x$ thì thay vào sẽ được ngay $g(x)g(y) = g(xy-1) + 2xy - 1$. Bài toán sẽ gọn gàng hơn nhiều.

Bài 3

Cho tam giác nhọn không cân ABC có trực tâm H và D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C. Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF với tâm I và K, J lần lượt là trung điểm BC, EF. Cho HJ cắt lại (I) tại G, GK cắt lại (I) tại L.

a) Chứng minh rằng AL vuông góc với EF.

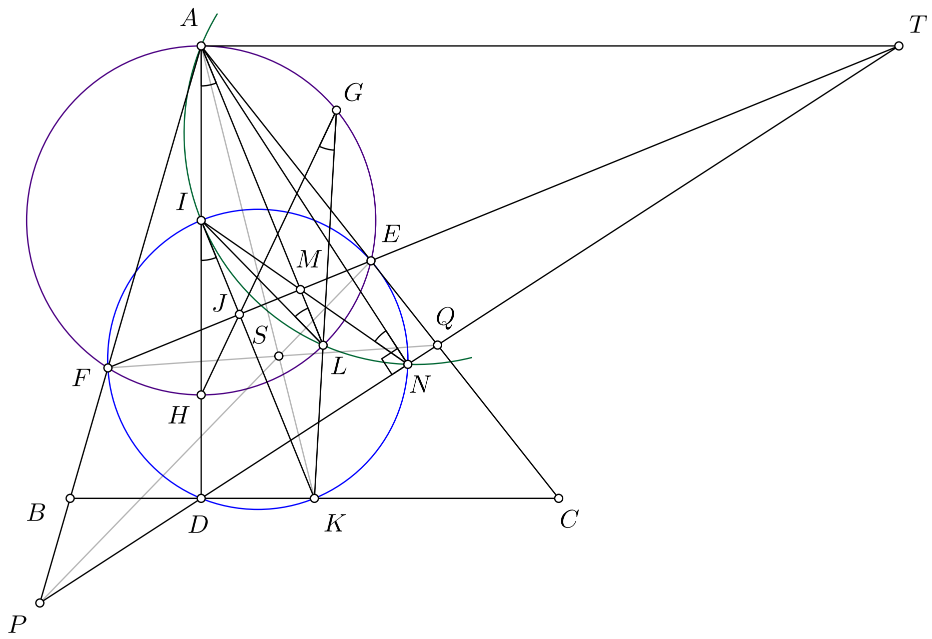
b) Cho AL cắt EF tại M, IM cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác IEF tại N, DN cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng PE, QF, AK đồng quy.

Lời giải. Ta thấy (HEF) là đường tròn đường kính AH nên I là trung điểm AH, kéo theo (IEF) là đường tròn Euler của tam giác ABC nên nó đi qua D, K.

a) Dễ thấy $IE = IF$ và $KE = KF$, do đó IK là trung trực EF nên đi qua J, từ đó có được

$$\overline{JI} \cdot \overline{JK} = \overline{JE} \cdot \overline{JF} = \overline{JH} \cdot \overline{JG}$$

nên $HKGI$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\angle HIK = \angle HGK = \angle HAL$, do đó $IK \parallel AL$. Mà $IK \perp EF$ nên $AL \perp EF$.



b) Ta có

$$\overline{MA} \cdot \overline{ML} = \overline{ME} \cdot \overline{MF} = \overline{MI} \cdot \overline{MN}$$

nên tứ giác $AILN$ nội tiếp, suy ra

$$\angle ANI = \angle ALI = \angle IAL = \angle DIK = 90^\circ - \angle IKD = 90^\circ - \angle IND$$

nên $\angle AND = 90^\circ$.

Nếu $DN \parallel EF$ thì $AN \perp EF$, mà $AM \perp EF$ nên MN đi qua A, suy ra A, I, M thẳng hàng nên $AI \perp EF$, kéo theo $EF \parallel BC$, điều này không thể xảy ra vì tam giác ABC không cân. Do đó, DN và EF không song song, và giả sử chúng cắt nhau tại điểm T.

Ta thấy N thuộc đường tròn đường kính AD và hai đường tròn đường kính AD, AH tiếp xúc nhau nên TA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn nói trên, vì T chính là tâm đẳng phương của chúng và (IEF). Do đó $TA \perp AD$, hay $AT \parallel BC$.

Gọi S là giao điểm của PE và QF, ta có chùm điều hòa cơ bản $A(TS, BC) = A(TS, PQ) = -1$, mà $AT \parallel BC$ nên AS chia đôi BC, tức AS đi qua K, hay AK, PE, QF đồng quy. Ta có điều cần chứng minh.

□

Nhận xét. Bài toán có ý thứ nhất khá nhẹ nhàng, còn có thể được tiếp cận bằng cách sử dụng kiến thức về tứ giác điều hòa và đường đối song.
Ý thứ hai cũng không quá khó, tuy nhiên việc tiếp cận bằng những hướng không sử dụng kiến thức về chùm điều hòa là khá khó khăn nên nhìn chung, các thí sinh không nắm vững phần này sẽ gặp phải trở ngại nhất định ở ý b). Khi chuyển mô hình đường tròn Euler về mô hình đường tròn bàng tiếp, có thể thấy $\angle AND = 90^\circ$ là tính chất khá kinh điển trong mô hình đường tròn nội tiếp, đường tròn bàng tiếp.

Bài 4

Với số nguyên $n \geq 2$, gọi $s(n)$ là tổng các số nguyên dương không vượt quá n và không nguyên tố cùng nhau với n.

a) Chứng minh $s(n) = \dfrac{n}{2}(n+1-\phi(n))$, trong đó $\phi(n)$ là số các số nguyên dương không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n.

b) Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên $n \geq 2$ thỏa mãn $s(n) = s(n+2021)$.

Lời giải.

a) Với mỗi số $d \in \{1, 2, \ldots, n\}$ và $\gcd(d, n) = 1$, ta cũng thấy rằng $\gcd(n-d, n) = 1$. Ngoài ra, với $n \geq 2$ thì $\varphi(n)$ chẵn nên các số nguyên tố cùng nhau với n như trên sẽ được chia thành các cặp có dạng $(d, n-d)$ với tổng là n. Từ đó suy ra tổng các số nguyên tố cùng nhau với n và không vượt quá n sẽ là $\dfrac{n\varphi(n)}{2}$. Do đó

$$s(n) = 1 + 2 + \cdots + n - \frac{n\varphi(n)}{2} = \frac{n}{2}(n+1-\varphi(n)).$$

b) Giả sử phản chứng rằng tồn tại số $n \geq 2$ thỏa mãn $s(n) = s(n+2021)$. Ta có $s(n) = \dfrac{n}{2}(n+1-\varphi(n))$ nên thay vào đẳng thức trên, ta được

$$(n+2021)(n+2022-\varphi(n+2021)) = n\left(n+1-\varphi(n)\right).$$

Ta xét các trường hợp sau

1. Nếu $2021 \nmid n$ và $\gcd(n, 2021) = 1$ thì dễ thấy $\gcd(n, n+2021) = 1$ và có ngay $n+2021 \mid 2s(n+2021) = 2s(n)$ nên $n(n+2021) \mid 2s(n) < n(n+1)$, vô lý.

2. Nếu $2021 \nmid n$ và $\gcd(n, 2021) > 1$ thì chú ý rằng $2021 = 43 \cdot 47$ nên để đơn giản, ta thay 2021 bởi tích hai số nguyên tố lẻ p, q.

   Giả sử rằng $p \mid n$ thì đặt $n = pk$ với $\gcd(k, q) = 1$.Thay vào

   $$(pk+pq)(pk+pq+1-\varphi(pk+pq)) = pk(pk+1-\varphi(pk))$$

   hay

   $$(k+q)(pk+pq+1-\varphi(p(k+q))) = k(pk+1-\varphi(pk)).$$

   Do $\gcd(k+q, k) = 1$ nên đặt $pk+q-\varphi(pk+pq) = ck$ với $c \in \mathbb{Z}^+, c < p$ nên $pk+1-\varphi(pk) = c(k+q)$. Trừ hai đẳng thức trên, vế theo vế, ta có

   $$q(p+c) = \varphi(pk+pq) - \varphi(pk).$$

   Lại có vế phải chia hết cho $p-1$ nên $p-1 \mid q(c+p)$ hay $c = p-2$. Suy ra $\varphi(p(k+q)) = 2k+pq+1$ và $\varphi(pk) = 2k-(p-2)q+1$.

- Nếu $p \mid k$ thì $p^2 \mid pk$ nên $p \mid \varphi(pk)$, kéo theo $p \mid (p-2)q+1$, dễ thấy vô lý khi $(p,q) = (43,47),(47,43)$. Tương tự nếu $p \mid k+q$.
- Nếu $\gcd(k,p), \gcd(k+q,p) = 1$ nên theo tính chất hàm nhân tính thì

  $$(p-1)\varphi(k+q) = 2k+pq+1,\ (p-1)\varphi(k) = 2k-(p-2)q+1.$$

  Trừ hai đẳng thức trên, vế theo vế, ta có $\varphi(k+q) - \varphi(k) = 2q$, không chia hết cho 4. Do đó, một trong hai số $\varphi(k+q), \varphi(k)$ không chia hết cho 4. Ta có bổ đề quen thuộc sau (suy ra trực tiếp từ công thức của hàm phi Euler).

  Bổ đề
  Với $n \geq 5$ là số nguyên dương thỏa $\varphi(n)$ không chia hết cho 4 thì $n = a^m$ hoặc $n = 2a^m$ với a là số nguyên tố lẻ và $m \in \mathbb{Z}^+$.

  Áp dụng vào bài toán, ta thấy rằng nếu $k = a^m$ thì $\varphi(k) = a^{m-1}(a-1)$ nên $(p-1)a^{m-1}(a-1) = 2a^m - (p-2)q + 1 < 2a^m$ hay $(p-1)\left(1-\frac{1}{a}\right) < 2$, dễ thấy vô lý.

  Tương tự nếu $k = 2a^m$ hoặc $k+1 = a^m$ hoặc $k+1 = 2a^m$.

Do đó, trường hợp này được giải quyết hoàn toàn.

3. Nếu $2021 \mid n$ thì ký hiệu như trên, đặt $n = pqk$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ thay vào đẳng thức trên, ta được

$$(k+1)(pqk+pq+1-\varphi(pq(k+1))) = k(pqk+1-\varphi(pqk)) \qquad (*)$$

Do $\gcd(k,k+1) = 1$ nên $k+1 \mid pqk+1-\varphi(pqk)$. Đặt $pqk+1-\varphi(pqk) = c(k+1)$ với $c \in \mathbb{Z}^+, c < pq$ thì thay vào đẳng thức (*) được

$$pqk+pq+1-\varphi(pq(k+1)) = ck.$$

Trừ xuống ta được $c+pq = \varphi(pq(k+1)) - \varphi(pqk)$ chia hết cho $(p-1)(q-1)$ và $c < pq$ nên có $c = pq-2p-2q+2$. Do đó

$$pqk+1-\varphi(pqk) = c(k+1) \text{ hay } \varphi(pqk) = 2(p+q-1)k - c + 1.$$

Tương tự $\varphi(pq(k+1)) = 2(p+q-1)k+pq+1$. Nếu như $\gcd(k,pq), \gcd(k+1,pq) > 1$ thì dễ thấy vô lý tương tự (2). Do đó, ta lại áp dụng tính nhân tính, ta có

$$\begin{cases} (p-1)(q-1)\varphi(k+1) = 2(p+q-1)k+pq-1 \\ (p-1)(q-1)\varphi(k) = 2(p+q-1)k-pq+2p+2q-1 \end{cases}$$

nên trừ xuống có $\varphi(k+1) - \varphi(k) = 2$. Suy ra một trong hai số $\varphi(k+1), \varphi(k)$ không chia hết cho 4. Đến đây thực hiện tương tự trên.

Vậy trong mọi trường hợp đều không tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn đề bài. □

> **Nhận xét.** Qua lời giải trên, ta thấy rằng bài toán vẫn đúng nếu thay $43, 47$ bởi các số nguyên tố $p < q$ sao cho $p \nmid 2q-1$ và $q \nmid 2p-1$.

Bài 5

Cho đa thức $P(x) = a_{21}x^{21} + a_{20}x^{20} + \cdots + a_1 x + a_0$ có các hệ số thuộc $[1011, 2021]$. Biết rằng $P(x)$ có nghiệm nguyên và c là một số dương sao cho $|a_{k+2} - a_k| \le c$ với mọi $k \in \{0, 1, \ldots, 19\}$.

a) Chứng minh rằng $P(x)$ có đúng một nghiệm nguyên.

b) Chứng minh $\sum\limits_{k=0}^{10} (a_{2k+1} - a_{2k})^2 \le 440c^2$.

Lời giải.

a) Do $P(x)$ là đa thức có hệ số toàn là số dương nên nghiệm của nó phải âm. Ta có bổ đề quen thuộc sau (chứng minh theo kiểu bất đẳng thức trị tuyệt đối và làm trội đơn giản):

Bổ đề

Cho đa thức hệ số thức $P(x)$ có dạng $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ với $a_n \neq 0$ và có nghiệm $x = x_0$ thì

$$|x_0| < 1 + \max_{0 \le i < n} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|.$$

Theo bổ đề thì $|x_0| < 1 + \frac{2021}{1011} < 3$ nên $x_0 = -1$ hoặc $x_0 = -2$. Giả sử $P(-2) = 0$ thì ta có

$$a_{21}2^{21} + a_{19}2^{19} + \cdots + a_1 2 = a_{20}2^{20} + a_{18}2^{18} + \cdots + a_0.$$

Ta thấy

$$\begin{cases} VT \ge 1011(2 + 2^3 + \cdots + 2^{21}) = 2022 \cdot \dfrac{2^{22} - 1}{2^2 - 1} \\ VP \le 2021(1 + 2^2 + \cdots + 2^{20}) = 2021 \cdot \dfrac{2^{22} - 1}{2^2 - 1} \end{cases}.$$

Đến đây suy ra điều vô lý, vậy nên $x_0 = -1$ là nghiệm nguyên duy nhất của đa thức.

b) Theo câu a ta có

$$a_0 + a_2 + \cdots + a_{20} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{21}.$$

Do đó, đặt $b_i = a_{2i+1} - a_{2i}$ với $0 \le i \le 10$ thì ta có ngay $\sum\limits_{i=0}^{10} b_i = 0$ và cần chỉ ra rằng

$$S = \sum_{i=0}^{10} b_i^2 \le 440c^2.$$

Ta sẽ đánh giá các giá trị $b_0 \to b_4$ và $b_6 \to b_{10}$ thông qua b_5, chú ý rằng

$$|b_5 - b_4| = |(a_{11} - a_{10}) - (a_9 - a_8)| \le |a_{11} - a_9| + |a_{10} - a_8| \le 2c$$

nên

$$(b_5 - b_4)^2 \le 4c^2 \to b_4^2 \le 4c^2 + 2b_4 b_5 - b_5^2 \le 4c^2 + 2b_4 b_5.$$

Tương tự ta cũng có
$$b_6^2 \le 4c^2 + 2b_6b_5.$$

Tiếp theo thì
$$\begin{aligned}|b_5 - b_3| &= |(a_{11} - a_{10}) - (a_7 - a_6)| \\ &\le |a_{11} - a_9| + |a_{10} - a_8| + |a_9 - a_7| + |a_8 - a_6| \le 4c\end{aligned}$$

nên
$$(b_5 - b_3)^2 \le 16c^2 \to b_3^2 \le 16c^2 + 2b_4b_5 \text{ và } b_7^2 \le 16c^2 + 2b_7b_5.$$

Tổng quát lên thì $b_{5\pm k}^2 \le 4k^2 + 2b_5b_{5\pm k}$ với $1 \le k \le 5$. Cứ như thế, ta được
$$S \le 2 \cdot 4 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + 5^2)c^2 + 2b_5(b_0 + b_1 + \cdots + b_{10}) = 440c^2.$$

□

Nhận xét. Câu a của bài toán có thể làm trực tiếp chứ không cần thông qua bổ đề, tuy nhiên nếu áp dụng bổ đề vào thì bước xử lý sẽ sáng sủa hơn nhiều. Riêng ý b là một bài bất đẳng thức khó liên quan đến đánh trị tuyệt đối, bước quan trọng là ý tưởng dồn biến về số ở vị trí chính giữa.

Bài 6

Một học sinh chia tất cả 30 viên bi vào 5 cái hộp được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 (sau khi chia có thể có hộp không có viên bi nào).

a) Hỏi có bao nhiêu cách chia các viên bi vào các hộp (hai cách chia là khác nhau nếu có một hộp có số bi trong hai cách chia là khác nhau)?

b) Sau khi chia, học sinh này sơn 30 viên bi đó bởi một số màu (mỗi viên được sơn đúng một màu, một màu có thể sơn cho nhiều viên bi), sao cho không có 2 viên bi nào trong cùng một hộp có màu giống nhau và từ hai hộp bất kì không thể chọn ra được 8 viên bi được sơn bởi 4 màu. Chứng minh rằng với mọi cách chia, học sinh đều phải dùng không ít hơn 10 màu để sơn bi.

c) Hãy chỉ ra một cách chia sao cho với đúng 10 màu, học sinh có thể sơn bi thỏa mãn các điều kiện ở câu b).

Lời giải.

a) Áp dụng bài toán chia kẹo Euler cho trường hợp 30 viên kẹo và 5 em bé, trong đó không nhất thiết em nào cũng có kẹo, ta có ngay đáp số là
$$C_{30+5-1}^{5-1} = C_{34}^4.$$

b) Gọi m là số màu cần phải dùng để sơn bi.

Theo giả thiết thì 2 hộp sẽ không thể chọn ra 8 viên bi được sơn bởi 4 màu, mà 2 bi cùng hộp thì phải khác màu nên ta suy ra 2 hộp sẽ không có các viên bi được sơn chung 4 màu. Nói cách khác, với 2 hộp bất kỳ, số màu được sơn chung cho bi của hai hộp sẽ không vượt quá 3. Ta đếm số bộ S có dạng $(\{A, B\}, C)$ trong đó hộp A, B có bi được sơn cùng màu C.

CÁCH 1. Đếm $\{A, B\}$ trước, ta có $C_5^2 = 10$ cách. Chọn C thì có không quá 3 cách. Do đó

$$S \leq 10 \cdot 3 = 30.$$

CÁCH 2. Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_m$ là số hộp có bi được sơn bởi màu $1, 2, \ldots, m$. Do mỗi màu chỉ được dùng một lần trong mỗi hộp nên có ngay

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 30.$$

Ta có

$$S = \sum_{i=0}^{m} C_{x_i}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}(x_i^2 - x_i) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{m} x_i^2 - 30\right).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$S \geq \frac{1}{2}\left(\frac{30^2}{m} - 30\right) = \frac{450}{m} - 15.$$

Vì thế nên

$$30 \geq \frac{450}{m} - 15 \text{ nên } m \geq 10.$$

Do đó, số màu cần dùng không nhỏ hơn 10.

c) Để xây dựng cách tô cho $m = 10$ màu, ta thấy rằng các đánh giá ở trên đều phải xảy ra dấu bằng, tức là:

- Mỗi màu được tô cho 3 hộp.
- Mỗi hộp có 6 viên bi và được tô bởi đúng 6 màu.
- Hai hộp bất kỳ có chung nhau đúng 3 màu.

Ta có bảng bên dưới mô tả cách tô thỏa mãn.

Hộp	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	×	×	×	×	×	×				
2	×	×	×				×		×	×
3	×			×	×			×	×	×
4		×		×		×	×	×		×
5			×		×	×	×	×	×	

Bài toán được giải quyết. □

> **Nhận xét.** Tuy phát biểu cồng kềnh và có ba đối tượng (hộp-màu-bi) dễ gây nhiễu nhưng đây vẫn là một bài toán khá nhẹ nhàng cho hai kỹ thuật quen thuộc là: chia kẹo Euler và đếm bằng hai cách; ngay cả khi hai ý b, c được gộp lại (tức là không có gợi ý chặn dưới của số màu là 10).

Bài 7

Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là giao điểm hai tiếp tuyến của (O) tại B và C. Đường tròn đi qua A và tiếp xúc với BC tại B cắt trung tuyến đi qua A của tam giác ABC tại G. Cho BG, CG lần lượt cắt CD, BD tại E, F.

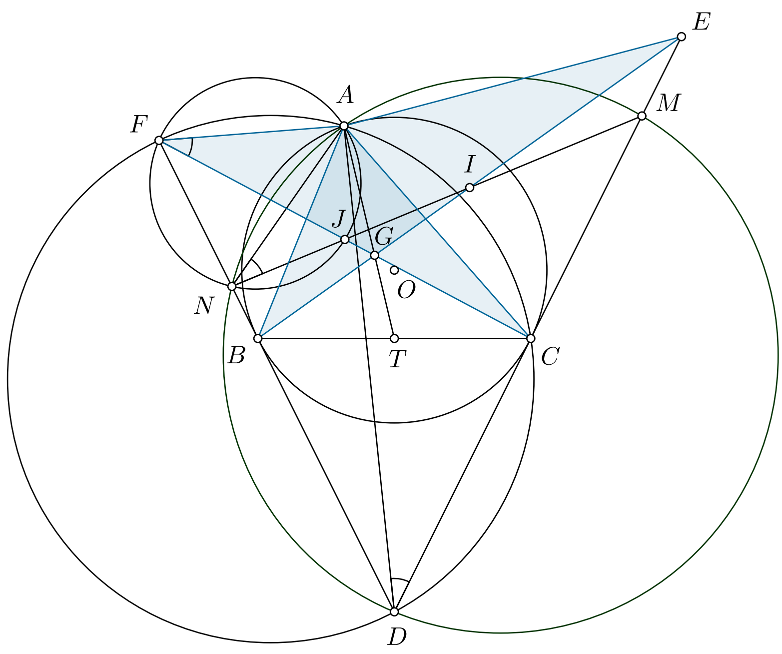
a) Đường thẳng đi qua trung điểm của BE và CF lần lượt cắt BF, CE tại M, N. Chứng minh rằng các điểm A, D, M, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Cho AD, AG lần lượt cắt lại đường tròn ngoại tiếp các tam giác DBC, GBC tại H, K. Trung trực của HK, HE, HF lần lượt cắt BC, CA, AB tại R, P, Q. Chứng minh rằng các điểm R, P, Q thẳng hàng.

,

Lời giải.

a) Gọi T, I, J lần lượt là trung điểm BC, BE, CF. Ta có (GBA) tiếp xúc BC nên $TC^2 = TB^2 = \overline{TG} \cdot \overline{TA}$, suy ra (GCA) cũng tiếp xúc với BC. Từ đó ta có $\angle FBA = \angle ACB = \angle TGC = \angle AGF$ nên tứ giác $AGBF$ nội tiếp. Chứng minh tương tự ta cũng có $AGCE$ là tứ giác nội tiếp, do đó tồn tại phép vị tự quay tâm A biến F thành C và biến B thành E.



Ta thấy qua phép biến hình trên, J biến thành I, mà FB giao EC tại D và FB giao JI tại N nên ta có $FACD$ và $FAJN$ nội tiếp, kéo theo $\angle ANJ = \angle AFJ = \angle ADC$ nên $ANDM$ nội tiếp.

b) Ta cần có bổ đề sau

Bổ đề 1

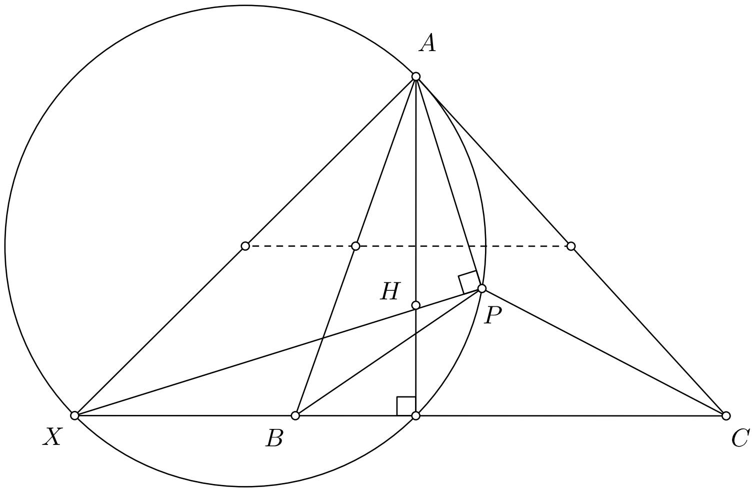
Cho tam P là một điểm nằm bất kì trong tam giác ABC. Gọi X, Y, Z lần lượt là điểm đối xứng với P qua trung điểm BC, CA, AB. Khi đó AX, BY, CZ đồng quy tại trung điểm mỗi đường.

Chứng minh. Để ý $PBXC$, $PCYA$ và $PAZB$ là các hình bình hành nên dễ thấy AX, BY, CZ đồng quy tại trung điểm mỗi đường. □

Bổ đề 2

Cho P là một điểm nằm bất kì trong tam giác ABC. Đường thẳng qua P vuông góc với PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại X, Y, Z. Khi đó X, Y, Z thẳng hàng.

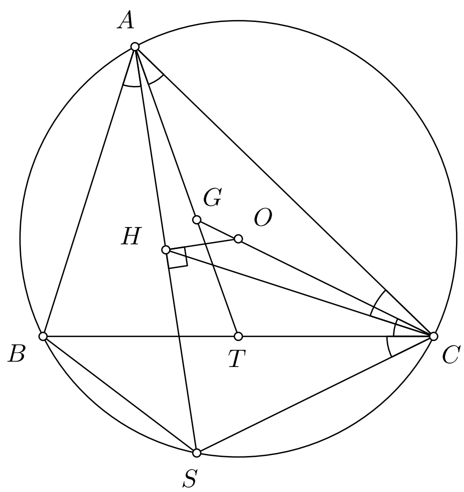
Chứng minh.



Ta thấy X, Y Z thẳng hàng khi và chỉ khi trung điểm của AX, BY, CZ thẳng hàng, tức là 3 đường tròn đường kính AX, BY, CZ đồng trục. Tuy nhiên điều này là đúng vì dễ thấy 3 đường tròn trên đồng trục PH, với H là trực tâm tam giác ABC. □

Trở lại bài toán.

Gọi S là giao điểm thứ hai của AD với (O), ta thấy H chính là trung điểm của AS và $ABSC$ là tứ giác điều hòa.



Từ đó ta có

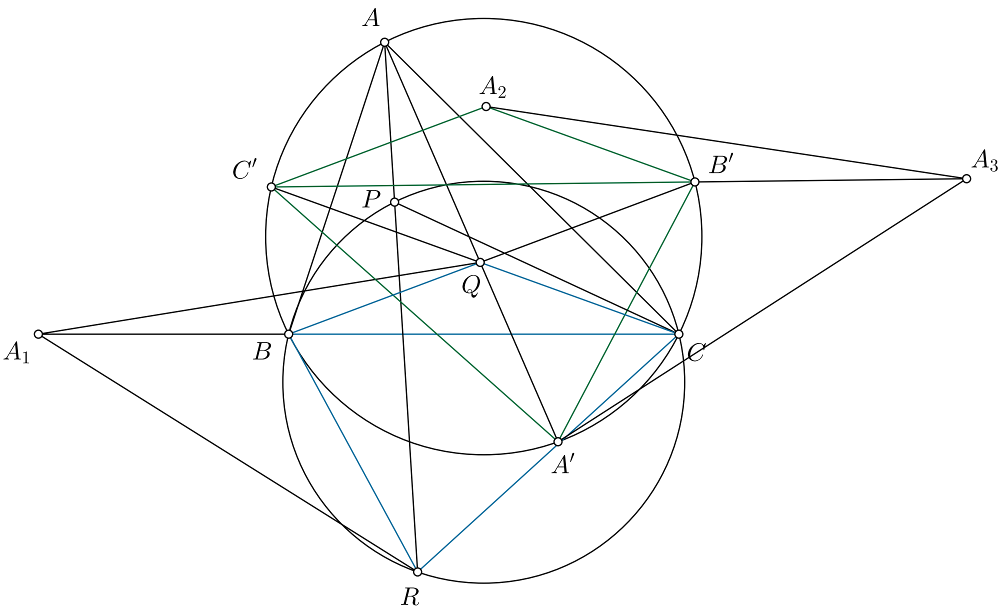
$$\angle ACH = \angle BCS = \angle BAS = \angle TAC = \angle GCB$$

nên CH và CG đẳng giác trong góc ACB, mặt khác ta cũng có AH và AG đẳng giác trong góc BAC nên H và G là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC.

Từ tính chất trên, ta sẽ hoàn tất bài toán bằng cách chứng minh kết quả tổng quát hơn như sau.

> **Khẳng định —** Cho tam giác ABC có P, Q là hai điểm liên hợp đẳng giác. Gọi R là giao điểm thứ hai của PA với đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC. Trên BC lấy A_1 sao cho $A_1R = A_1Q$. Xác định các điểm B_1, C_1 tương tự. Khi đó A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

Chứng minh. Gọi QA, QB, QC giao (O) lần nữa tại A', B', C'. Lấy A_2 đối xứng Q qua $B'C'$. Trung trực $A'A_2$ cắt $B'C'$ tại A_3. Xác định B_3, C_3 tương tự. Áp dụng bổ đề 1 và bổ đề 2, ta suy ra A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.



Ta có

$$\angle RBC = \angle RPC = \angle PAC + \angle PCA = \angle A'AB + \angle C'CB = \angle C'B'A'.$$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\angle RCB = \angle A'C'B'$ nên hai tam giác RBC và $A'B'C'$ đồng dạng. Hơn nữa, $\angle A_2B'C' = \angle B'C'C = \angle B'BC = \angle QBC$, tương tự $\angle A_2C'B' = \angle QCB$, nên ta suy ra $\dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{A_3B'}{A_3C'}$. Từ đó, chú ý rằng A_3, B_3, C_3 thẳng hàng nên ta có

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{A_3B'}{A_3C'} \cdot \frac{B_3C'}{B_3A'} \cdot \frac{C_3A'}{C_3B'} = 1.$$

Theo định lí Menelaus, ta có A_1, B_1, C_1 thẳng hàng. □

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

> **Nhận xét.** Ý thứ nhất của bài toán khá dễ chịu với mô hình điểm Humpty, có thể được giải quyết nhẹ nhàng bằng biến đổi góc. Trái lại, ý b) thực sự vô cùng thử thách, phức tạp cả về mặt ý tưởng lẫn hình vẽ, có thể coi là ý khó nhất trong cả kì thi.