

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)
Ngày thi: 09/11/2020

Bài 1. (3,0 điểm)

Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} 2y^2 - 4xy + 3y - 4x - 1 = 3\sqrt{(y^2 - 1)(y - 2x)} \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{y-2x} = \sqrt{2(y-x+1)} \end{cases}$$

Bài 2. (3,0 điểm)

Cho đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ với hệ thực và $a_n \neq 0$ thỏa mãn đẳng thức $f(x) \cdot f(2x^2) = f(2x^3 + x)$. Tìm số nghiệm thực của đa thức $f(x)$.

Bài 3. (5,0 điểm)

1. Cho số thực $a > 1$ và dãy số (x_n) với $n \in \mathbb{N}^*$ được xác định bởi:

$$x_1 = a; \quad x_2 = 1; \quad x_{n+2} = x_n - \ln x_n.$$

Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \ln \sqrt{x_{2k-1}}$ ($n \geq 2$). Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n}{n} \right)$.

2. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $n = \frac{2^{2p} - 1}{3}$ là số tự nhiên lớn hơn 21 và 2^n chia n dư 2.

Bài 4. (7,0 điểm)

1. Cho tam giác nhọn ABC không cân và nội tiếp đường tròn (O). Trong tam giác ABC lấy điểm P sao cho AP vuông góc với BC. Kẻ PE, PF lần lượt vuông góc với AB, AC (E thuộc AB, F thuộc AC). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là G (khác điểm A). Chứng minh rằng ba đường thẳng GP, BF, CE đồng quy tại một điểm.

2. Cho đường tròn tâm O và tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H, trong đó $AB < BC$; Trên tia BO kéo dài lấy điểm D sao cho $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$. Một đường thẳng đi qua điểm H song song với đường thẳng BO cắt cung nhỏ AC tại điểm E. Chứng minh rằng $BH = DE$.

Bài 5. (2,0 điểm)

Cho n là số nguyên dương không nhỏ hơn 3 và các điểm A_1, A_2, \dots, A_n cùng nằm trên một đường tròn. Có tối đa bao nhiêu tam giác nhọn có đỉnh là ba điểm trong số các điểm trên.