SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **HẢI PHÒNG**	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ LỚP 12** **Năm học 2019 – 2020**
ĐỀ CHÍNH THỨC *(Đề thi gồm 01 trang)*	**ĐỀ THI MÔN:TOÁN – BẢNG KHÔNG CHUYÊN** *Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)* *Ngày thi: 19/9/2019*

Bài 1 (2,0 điểm)

a) Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+(m-2)x+m^2+2019$. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

b) Cho hàm số $y=\frac{2mx-3-2m}{x+2}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=x-2$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 45^0.

Bài 2 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình lượng giác sau $\frac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}$.

b) Giải hệ phương trình sau trên tập số thực $\begin{cases} x^2-3y+2\sqrt{x^2y+2y}+2=0 \\ \sqrt{x^2+4x-y+1}+\sqrt[3]{2x-1}=1 \end{cases}$

Bài 3 (2,0 điểm) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=a; AC=2a; AA'=2a\sqrt{5}$ và góc $\widehat{BAC}$ bằng 120^0. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'.

a) Chứng minh rằng MB vuông góc với $A'M$.

b) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BM)$ theo a.

Bài 4 (1,0 điểm) Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên được lấy ra có mặt đúng ba chữ số khác nhau.

Bài 5 (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BD và CD. Biết $A(4;6)$; đường thẳng HK có phương trình $3x-4y-4=0$; điểm C thuộc đường thẳng $d_1: x+y-2=0$ và điểm B thuộc đường thẳng $d_2: x-2y-2=0$; điểm K có hoành độ nhỏ hơn 1. Tìm tọa độ các điểm B và C.

Bài 6 (1,0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=\sqrt{2}-1 \\ u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1 \end{cases}$.

Hai dãy số $(v_n),(w_n)$ xác định như sau: $v_n=4^n(1-u_n); w_n=u_1.u_2.u_3...u_n, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1$. Tìm các giới hạn $\lim v_n$; $\lim w_n$.

Bài 7 (1,0 điểm) Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{4a^3+3b^3+2c^3-3b^2c}{(a+b+c)^3}$$

……………HẾT……………

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

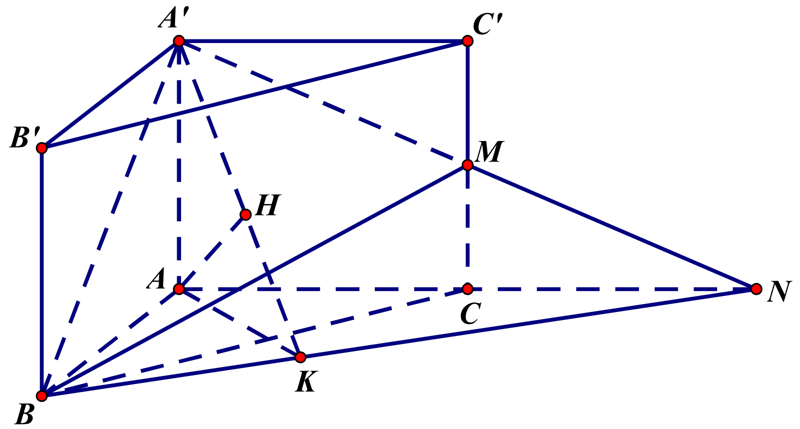
Họ và tên thí sinh:……………………………………….. Số báo danh:…………………………………………….

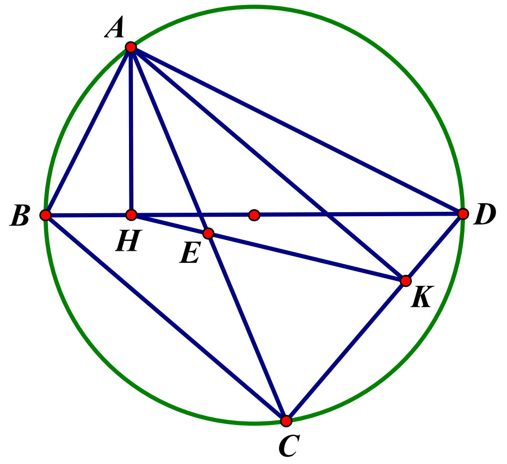
Cán bộ coi thi 1:…………………………………………. Cán bộ coi thi 2:……………………………………….

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HẢI PHÒNG	ĐÁP ÁN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ LỚP 12 Năm học 2019 – 2020
ĐỀ CHÍNH THỨC *(Đáp án gồm 06 trang)*	**ĐỀ THI MÔN:TOÁN – BẢNG KHÔNG CHUYÊN** *Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)* *Ngày thi: 19/9/2019*

<table>
<tr><th>BÀI</th><th>Ý</th><th>ĐÁP ÁN</th><th>ĐIỂM</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Bài 1
(2,0 điểm)</td><td>a</td><td>Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+(m-2)x+m^2+2019$. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.</td><td>(1,0đ)</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>TXĐ: $D=\mathbb{R}.$; $y'=x^2-2x+m-2$
Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow x^2-2x+m-2\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow m\ge -x^2+2x+2,\forall x\in(0;+\infty)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Xét hàm số $g(x)=-x^2+2x+2$; $g'(x)=-2x+2$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$
<table>
<tr><td>x</td><td>0 1 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g'(x)$</td><td> $+$ 0 $-$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>$\nearrow$ 3 $\searrow$</td></tr>
</table></td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Từ bảng biến thiên
$\Rightarrow m\ge g(x),\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow m\ge \underset{x\in(0;+\infty)}{Max}\left[g(x)\right]\Leftrightarrow m\ge 3$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>b</td><td>Cho hàm số $y=\frac{2mx-3-2m}{x+2}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=x-2$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 45^0.</td><td>(1,0đ)</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td>Phương trình hoành độ giao điểm:
$\frac{2mx-3-2m}{x+2}=x-2,\ (x\ne -2)$
$\Leftrightarrow x^2-2mx+2m-1=0\ \ ,\ (x\ne -2)$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2m-1\end{array}\right.$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}2m-1\ne 1\\2m-1\ne -2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m\ne 1\\m\ne -\frac{1}{2}\end{cases}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Gọi $A(1;-1);B(2m-1;2m-3)\ \Rightarrow \overrightarrow{OA}(1;-1);\overrightarrow{OB}(2m-1;2m-3)$
$\left|\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}\right|=OA.OB.\cos 45^0\ \Leftrightarrow 2=\sqrt{8m^2-16m+10}\Leftrightarrow 8m^2-16m+6=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\frac{3}{2}\\m=\frac{1}{2}\end{array}\right.$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Kết hợp điều kiện, ta được $m=\frac{3}{2}$ hoặc $m=\frac{1}{2}$.</td><td>0,25</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Bài 2
(2,0 điểm)</td><td>a</td><td>Giải phương trình lượng giác sau $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}.$</td><td>(1,0đ)</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td>ĐK: $\begin{cases} x\neq -\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x\neq \dfrac{7\pi}{6}+m2\pi, \quad k,m,n\in\mathbb{Z}. \\ x\neq \dfrac{\pi}{2}+n2\pi \end{cases}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$Pt \Leftrightarrow \cos x-\sin 2x=\sqrt{3}\left(1+\sin x-2\sin^2 x\right)$
$\Leftrightarrow \cos x-\sqrt{3}\sin x=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{18}-k\dfrac{2\pi}{3} \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. ,k\in\mathbb{Z}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Kết hợp điều kiện $\Rightarrow Pt$ có nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{18}-k\dfrac{2\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>b</td><td>Giải hệ phương trình sau trên tập số thực
$\begin{cases} x^2-3y+2\sqrt{x^2y+2y}+2=0 & (1) \\ \sqrt{x^2+4x-y+1}+\sqrt[3]{2x-1}=1 & (2) \end{cases}$</td><td>(1,0đ)</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>ĐK: $y\geq 0; x^2+4x-y+1\geq 0$
Từ phương trình (1) ta có
$x^2+2=3y-2\sqrt{y\left(x^2+2\right)}\Leftrightarrow \dfrac{3y}{x^2+2}-2\sqrt{\dfrac{y}{x^2+2}}=1$
Suy ra $\dfrac{y}{x^2+2}=1\Leftrightarrow y=x^2+2$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Thay vào phương trình (2) ta có $\sqrt{4x-1}+\sqrt[3]{2x-1}=1$
Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{4x-1} \\ v=\sqrt[3]{2x-1} \end{cases} \quad (u\geq 0)$
Hệ phương trình đã cho trở thành
$\begin{cases} u+v=1 \\ u^2-2v^3=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=0 \end{cases}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Ta có: $\begin{cases} \sqrt{4x-1}=1 \\ \sqrt[3]{2x-1}=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{9}{4} \end{cases}$ (Thỏa mãn điều kiện)
Vậy hệ có nghiệm $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{4}\right)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Bài 3
(2,0 điểm)</td><td>a</td><td>Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=a; AC=2a; AA'=2a\sqrt{5}$ và góc $\widehat{BAC}$ bằng 120^0 . Gọi M là trung điểm của cạnh CC' .
a) Chứng minh rằng MB vuông góc với $A'M$.</td><td>(1,0đ)</td></tr>
</table>

		 	
		Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC} = 7a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{7}$ Trong tam giác $A'C'M : A'M^2 = A'C'^2 + C'M^2 = 9a^2$ Trong tam giác $BAA' : A'B^2 = AB^2 + A'A^2 = 21a^2$ Trong tam giác $BCM : BM^2 = BC^2 + CM^2 = 12a^2$	0,5
		Ta có: $A'M^2 + MB^2 = A'B^2 \Rightarrow$ tam giác $A'BM$ vuông tại M hay $MB \perp A'M$.	0,5
	b	**Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BM)$.**	**(1,0đ)**
		Gọi $A'M \cap AC = N \Rightarrow d(A,(A'BM)) = d(A,(A'BN))$ Kẻ $AK \perp BN$ $, K \in BN$ Kẻ $AH \perp A'K,\ H \in A'K$ $\Rightarrow d(A,(A'BN)) = AH$	0,5
		Chứng minh được CM là đường trung bình của tam giác $A'AN$ $\Rightarrow A'M = MN$ và có $BM \perp A'N \Rightarrow$ tam giác $A'BN$ cân tại B $\Rightarrow BN = A'B = a\sqrt{21}$ Diện tích tam giác ABN là: $S_{ABN} = \frac{1}{2}AB.AN.\sin\widehat{BAN} = \frac{1}{2}AK.BN \Rightarrow AK = \frac{2\sqrt{7}a}{7}$	0,25
		Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{A'A^2} = \frac{36}{20a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{5}}{3}$ Vậy: $d(A,(A'BM)) = \frac{a\sqrt{5}}{3}$	0,25
Bài 4 **(1,0 điểm)**		**Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên được lấy ra có mặt đúng ba chữ số khác nhau.**	**(1,0đ)**
		Ta có: Số phần tử của không gian mẫu Ω là: $n(\Omega) = 9^5$	0,25
		Gọi A là biến cố: *"Trong số tự nhiên được lấy ra chỉ có mặt ba chữ số khác nhau"* Số cách chọn 3 chữ số phân biệt a,b,c từ 9 chữ số $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ là C_9^3. Xét các số thỏa mãn yêu cầu bài toán được tạo thành từ 3 chữ số $a;b;c$ ở trên. Có hai trường hợp sau xảy ra **TH1:** Một chữ số có mặt 3 lần; các chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần: Có tất cả: $3.\frac{5!}{3!} = 60$ số.	0,25
		TH2: Hai chữ số có mặt hai lần, chữ số còn lại có mặt 1 lần:	0,25

		Có tất cả: $3.\dfrac{5!}{2!.2!}=90$ số.	
		Số kết quả thuận lợi của biến cố A là: $n(A)=(60+90).C_9^3=12600$ Xác suất của biến cố A là: $p(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1400}{6561}\approx 0,2134$	0,25
Bài 5 **(1,0 điểm)**		**Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BD và CD. Biết $A(4;6)$; đường thẳng HK có phương trình $3x-4y-4=0$; điểm C thuộc đường thẳng $d_1: x+y-2=0$ và điểm B thuộc đường thẳng $d_2: x-2y-2=0$; điểm K có hoành độ nhỏ hơn 1. Tìm tọa độ các điểm B và C.**	**(1,0đ)**
			
		Gọi $E=AC\cap HK$ Tứ giác $AHKD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HAD}=\widehat{HKC}$. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{ACD}$. Tam giác ABD vuông tại $A\Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{HAD}$ Vậy $\widehat{HKC}=\widehat{ACD}$ hay tam giác ECK cân tại E. Vì tam giác ACK vuông tại K nên E là trung điểm của AC.	0,25
		Ta có $C\in d_1\Rightarrow C(c;2-c)\Rightarrow E\left(\dfrac{c+4}{2};\dfrac{8-c}{2}\right)$ Vì $E\in HK$ nên tìm được $c=4\Rightarrow C(4;-2)$.	0,25
		$K\in HK: 3x-4y-4=0$ nên gọi $K(4t;3t-1)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AK}(4t-4;3t-7);\overrightarrow{CK}(4t-4;3t+1)$. Ta có: $AK\perp CK\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{CK}=0\Leftrightarrow 25t^2-50t+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{5} \\ t=\dfrac{9}{5}\end{array}\right.$. Vì hoành độ điểm K nhỏ hơn 1 $\Rightarrow K(\dfrac{4}{5};\dfrac{-2}{5})$	0,25
		BC có phương trình: $2x-y-10=0$. $B=BC\cap d_2\Rightarrow B(6;2)$. Kết luận: $B(6;2);C(4;-2)$	0,25

Bài 6 (1,0 điểm)		**Cho dãy số** (u_n) **xác định bởi** $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2}-1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \end{cases}$. **Hai dãy số** $(v_n),(w_n)$ **xác định như sau:** $v_n = 4^n(1-u_n); w_n = u_1.u_2.u_3...u_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. **Tìm các giới hạn** $\lim v_n$; $\lim w_n$.	**(1,0đ)**
		Chọn $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\cos\alpha = \sqrt{2}-1$ Khi đó ta có $u_1 = \cos\alpha \Rightarrow u_2 = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} = \cos\dfrac{\alpha}{2}$ (Do $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$). Tương tự ta sẽ có $u_3 = \sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2}} = \cos\dfrac{\alpha}{4}$ Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n = \sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}}{2}} = \cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$	0,25
		Suy ra $v_n = 4^n(1-u_n) = 4^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}\right) = 4^n.2\sin^2\dfrac{\alpha}{2^n}$ Vậy $\lim v_n = \lim\left(4^n.2\sin^2\dfrac{\alpha}{2^n}\right) = \lim\left(\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2^n}}{\dfrac{\alpha}{2^n}}\right)^2.2\alpha^2 = 2\alpha^2$	0,25
		Ta có $w_n = u_1u_2...u_n = \cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}.\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-2}}\cdots\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha$ $= \dfrac{2^n\sin\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}.\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}.\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-2}}...\cos\dfrac{\alpha}{2}.\cos\alpha}{2^n\sin\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}} = \dfrac{\sin 2\alpha}{2^n\sin\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}}$	0,25
		Suy ra $\lim w_n = \lim\dfrac{\sin 2\alpha}{2^n\sin\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}} = \lim\left(\dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}}{\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}}}\right) = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$	0,25
Bài 7 (1,0 điểm)		**Cho các số thực dương** a,b,c. **Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:** $P = \dfrac{4a^3+3b^3+2c^3-3b^2c}{(a+b+c)^3}$	**(1,0đ)**
		Áp dụng BĐT Cauchy, ta có: $3b^2c \leq 2b^3+c^3$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b=c$. Ta chứng minh: $b^3+c^3 \geq \dfrac{(b+c)^3}{4}$ (1) , $\forall b>0, c>0$.	0,25

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Thật vậy:
$(1) \Leftrightarrow 4\left(b^3+c^3\right) \geq b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 \Leftrightarrow (b+c)(b-c)^2 \geq 0,\ b>0, c>0$
Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow b=c.$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Áp dụng các BĐT trên ta được:
$P \geq \dfrac{4a^3+\dfrac{(b+c)^3}{4}}{(a+b+c)^3} = 4t^3+\dfrac{1}{4}(1-t)^3$, với $t=\dfrac{a}{a+b+c}$, $t\in(0;1)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Xét hàm số $f(t)=4t^3+\dfrac{1}{4}(1-t)^3$ với $t\in(0;1)$
Có: $f'(t)=12t^2-\dfrac{3}{4}(1-t)^2$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{5} \\ t=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$
Bảng biến thiên:
<table><tr><td>t</td><td>0 $\dfrac{1}{5}$ 1</td></tr><tr><td>$f'(t)$</td><td>- 0 +</td></tr><tr><td>$f(t)$</td><td>$\searrow$ $\dfrac{4}{25}$ $\nearrow$</td></tr></table></td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Từ bảng biến thiên suy ra: $P \geq f(t) \geq \dfrac{4}{25}$.
Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ \dfrac{a}{a+b+c}=\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 2a=b=c.$
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{4}{25}$ khi $2a=b=c.$</td><td>0,25</td></tr>
</table>

Lưu ý: *Học sinh làm theo cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa.*