SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **GIA LAI** **ĐỀ THI CHÍNH THỨC**	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12** **CẤP TỈNH (BẢNG B), NĂM HỌC 2020 - 2021** **Môn: Toán** **Thời gian: 180 phút** *(không kể thời gian giao đề)* **Ngày thi: 12/12/2020** *(Đề thi có 08 câu, gồm 01 trang)*

Họ và tên thí sinh: ....

Số báo danh: ....

Câu 1. *(3,0 điểm)* Cho hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (1-m)x$ (m là tham số thực) có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B và C sao cho tổng hệ số góc của ba tiếp tuyến với (C) tại các điểm A, B và C nhỏ hơn 9.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình sau trên tập số thực $5x^2 - 10x = 4(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$.

b) Cho 3 số thực $x > 1, y > 1$ và $z > 1$ thỏa mãn

$\log_{(xy+yz+zx)}\left(5x^2+16y^2+27z^2\right) + \log_{12}\sqrt[4]{xy+yz+zx} = 2$. Tính $M = x + y + z$.

Câu 3. *(2,0 điểm)* Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển

$\left(\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x} - x\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x}\right)^n$, với $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $A_n^2 - nC_n^2 + 55n = 0$.

Câu 4. *(2,0 điểm)* Cho tam giác ABC thỏa mãn

$$2019\sin A + 2020\sin B + 2021\sin C = 2022\cos\left(\frac{A}{2}\right) + 2020\cos\left(\frac{B}{2}\right) + 2018\cos\left(\frac{C}{2}\right).$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Câu 5. *(3,0 điểm)* Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 2021$ và $u_{n+1} = {u_n}^2 - u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_n = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \cdots + \dfrac{1}{u_n}$. Tính $\lim v_n$.

Câu 6. *(2,0 điểm)* Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của đoạn BC, K là hình chiếu vuông góc của H lên AC. Biết $M\left(\dfrac{7}{4}; \dfrac{5}{4}\right)$ là trung điểm của đoạn HK, đường thẳng BK có phương trình $x + 7y - 13 = 0$. Gọi N là giao điểm của BK và AM. Tìm tọa độ điểm A, biết $I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn AB.

Câu 7. *(2,0 điểm)* Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) và O là trung điểm của đoạn AH. Gọi (α) là mặt phẳng qua O và không đi qua các điểm A, B, C và D. Mặt phẳng (α) cắt các đoạn AB, AC và AD lần lượt tại M, N và P. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM.AN.AP$ theo a.

Câu 8. *(2,0 điểm)* Cho hàm số $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + 2021x$, a, b và c là ba số thực dương sao cho phương trình $f\left[(a+b+c)x\right] + f(2020 - 3x) = 0$ vô nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{ab+bc+ca}$.

----- ***HẾT*** -----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
GIA LAI

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
MÔN TOÁN 12
NĂM HỌC 2020-2021
(Thời gian làm bài 180 phút)

Câu 1: ***(4 điểm)*** Cho hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (1-m)x$ (m là tham số thực) có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B và C sao cho tổng hệ số góc của ba tiếp tuyến với (C) tại các điểm A, B và C nhỏ hơn 9.

Câu 2: ***(4 điểm)*** a/ Giải phương trình sau trên tập số thực: $5x^2 - 10x = 4(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

b/ Cho 3 số thực $x > 1,\ y > 1,\ z > 1$ thỏa mãn:

$\log_{(xy+yz+zx)}\left(5x^2 + 16y^2 + 27z^2\right) + \log_{12}\sqrt[4]{xy + yz + zx} = 2$. Tính $M = x + y + z$.

Câu 3. ***(2 điểm)*** Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển $\left[\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x} - x\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x}\right]^n$, với $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $A_n^2 - nC_n^2 + 55n = 0$.

Câu 4. ***(2,0 điểm)*** Cho tam giác ABC thõa mãn

$2019\sin A + 2020\sin B + 2021\sin C = 2022\cos(\frac{A}{2}) + 2020\cos(\frac{B}{2}) + 2018\cos(\frac{C}{2})$ (1) . Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Câu 5: ***(3 điểm)*** Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 2021$ và $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_n = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \cdots + \dfrac{1}{u_n}$. Tính $\lim v_n$.

Câu 6: ***(2 điểm)*** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của đoạn BC, K là hình chiếu vuông góc của H lên AC. Biết $M\left(\dfrac{7}{4}; \dfrac{5}{4}\right)$ là trung điểm của đoạn HK, đường thẳng $BK: x + 7y - 13 = 0$. Gọi N là giao điểm của BK và AM. Tìm tọa độ điểm A, biết $I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn AB.

Câu 7: ***(2 điểm)*** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) và O là trung điểm của đoạn AH. Gọi (α) là mặt phẳng qua O và không đi qua các điểm A, B, C và D. Mặt phẳng (α) cắt các đoạn AB, AC và AD lần lượt tại M, N và P. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM.AN.AP$ theo a.

Câu 8: ***(2 điểm)*** Cho hàm số $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + 2021x$, gọi a, b, c là các số thực dương sao cho phương trình $f\left[(a+b+c)x\right] + f(2020 - 3x) = 0$ vô nghiệm.

Tìm GTNN của biểu thức $M = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{ab + bc + ac}$.

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: (4 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (1-m)x$ (m là tham số thực) có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B và C sao cho tổng hệ số góc của ba tiếp tuyến với (C) tại các điểm A, B và C nhỏ hơn 9.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$x^3 - (2m-1)x^2 + (1-m)x = x - m \Leftrightarrow x^3 - (2m-1)x^2 - mx + m = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2mx + m) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x^2 - 2mx + m = 0 \quad (*) \end{array}\right.$

Theo yêu cầu bài toán : $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ 1 + 2m + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0, m > 1 \\ m \neq -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Ta có $A(-1;-1-m)$; $B(x_1;x_1-m)$; $C(x_2;x_2-m)$

$y' = 3x^2 - 2(2m-1)x + 1 - m$

$y'(-1) = 3(-1)^2 - 2(2m-1)(-1) + 1 - m = 2 + 3m$

$y'(x_1) = 3x_1^2 - 2(2m-1)x_1 + 1 - m$

$y'(x_2) = 3x_2^2 - 2(2m-1)x_2 + 1 - m$

Áp dụng định lí Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m \end{cases}$

Theo yêu cầu bài toán ta có

$y'(-1) + y'(x_1) + y'(x_2) < 9 \Leftrightarrow 2 + 3m + 3x_1^2 - 2(2m-1)x_1 + 1 - m + 3x_2^2 - 2(2m-1)x_2 + 1 - m > 9$

$\Leftrightarrow 3(x_1^2 + x_2^2) - 2(2m-1)(x_1+x_2) - 5 - m > 0$

$\Leftrightarrow 3(x_1+x_2)^2 - 6x_1x_2 - 2(2m-1)(x_1+x_2) - 5 - m > 0$

$\Leftrightarrow 3(2m)^2 - 6m - 2(2m-1).2m - 5 - m > 0$

$\Leftrightarrow 12m^2 - 6m - 8m^2 + 4m - 5 - m > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 3m - 5 > 0$

$\Leftrightarrow m < \dfrac{3-\sqrt{89}}{8}$, $m > \dfrac{3+\sqrt{89}}{8}$

Giao với điều kiện ta được : $m < \dfrac{3-\sqrt{89}}{8}$, $m > \dfrac{3+\sqrt{89}}{8}$.

Câu 2: (4 điểm)

a/ Giải phương trình sau trên tập số thực: $5x^2 - 10x = 4(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

b/ Cho 3 số thực $x > 1$, $y > 1$, $z > 1$ thỏa mãn:

$\log_{(xy+yz+zx)}(5x^2 + 16y^2 + 27z^2) + \log_{12}\sqrt[4]{xy + yz + zx} = 2$. Tính $M = x + y + z$.

Lời giải

a) Giải phương trình: $5x^2 - 10x = 4(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$ (1)

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 4\left(x^2-2x+2\right)+\left(x^2-2x+1\right)-9=4\left(x-1\right)\sqrt{x^2-2x+2}$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x^2-2x+2}-\left(x-1\right)\right)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x^2-2x+2}-\left(x-1\right)=3 \\ 2\sqrt{x^2-2x+2}-\left(x-1\right)=-3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x^2-2x+2}=x+2 \\ 2\sqrt{x^2-2x+2}=x-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge -2 \\ 4\left(x^2-2x+2\right)=x^2+4x+4 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 4 \\ 4\left(x^2-2x+2\right)=x^2-8x+16 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge -2 \\ 3x^2-12x+4=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 4 \\ 3x^2-8=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge -2 \\ x=\dfrac{6\pm 2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 4 \\ x=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{6\pm 2\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy phương trình ban đầu có 2 nghiệm là $x=\dfrac{6\pm 2\sqrt{6}}{3}$.

b/ Tính $M=x+y+z$.

- Theo giả thiết ta có: $xy+yz+zx>1$ nên $\begin{cases} \log_{(xy+yz+zx)}12>0 \\ \log_{12}\left(xy+yz+zx\right)>0 \end{cases}$.

- Áp dụng BĐT *Cauchy* ta có:

$$5x^2+16y^2+27z^2=\left(3x^2+12y^2\right)+\left(4y^2+9z^2\right)+\left(18z^2+2x^2\right)$$

$$\ge 2\sqrt{3x^2.12y^2}+2\sqrt{4y^2.9z^2}+2\sqrt{18z^2.2x^2}=12\left(xy+yz+zx\right)$$

Hay $5x^2+16y^2+27z^2\ge 12\left(xy+yz+zx\right)$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=2y=3z$.

Khi đó: $\log_{(xy+yz+zx)}\left(5x^2+16y^2+27z^2\right)\ge \log_{(xy+yz+zx)}\left(12\left(xy+yz+zx\right)\right)=1+\log_{(xy+yz+zx)}12$

Suy ra:

$$\log_{(xy+yz+zx)}\left(5x^2+16y^2+27z^2\right)+\log_{12}\sqrt[4]{xy+yz+zx}\ge 1+\log_{(xy+yz+zx)}12+\frac{1}{4}\log_{12}\left(xy+yz+zx\right)$$

$$\ge 1+2\sqrt{\left(\log_{(xy+yz+zx)}12\right).\frac{1}{4}\log_{12}\left(xy+yz+zx\right)}=1+1=2.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x=2y=3z \\ \log_{(xy+yz+zx)}12=\log_{12}\left(xy+yz+zx\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y=3z \\ xy+yz+zx=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \\ z=\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Vậy $M = z + y + z = \dfrac{11\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển $\left[\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x} - x\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x}\right]^n$, với $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $A_n^2 - nC_n^2 + 55n = 0$.

Lời giải

Xét phương $A_n^2 - nC_n^2 + 55n = 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - n.\frac{n!}{2!(n-2)!} + 55n = 0 \Leftrightarrow n(n-1) - \frac{1}{2}n^2(n-1) + 55n = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \\ n = 12 \\ n = -9 \end{array}\right.$$

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên ta nhận $n = 12$.

Ta biến đổi

$$\frac{1}{(x+1)\sqrt{x} - x\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}.\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[4]{x}$$

Xét khai triển $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[4]{x}\right)^{12} = \sum\limits_{k=0}^{12} C_{12}^k \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12-k} (-1)^k \left(\sqrt[4]{x}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{12} C_{12}^k (-1)^k x^{\frac{3}{4}k - 6}$.

Số hạng không chứa x thỏa $\dfrac{3}{4}k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = 8$.

Vậy hệ số của số hạng không chứa x là $C_{12}^8 (-1)^8 = 495$.

Câu 4. ***(2,0 điểm)*** Cho tam giác ABC thõa mãn

$2019\sin A + 2020\sin B + 2021\sin C = 2022\cos(\dfrac{A}{2}) + 2020\cos(\dfrac{B}{2}) + 2018\cos(\dfrac{C}{2})$ (1) . Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Lời giải

Ta có: $\cos\dfrac{A}{2} = \sin\dfrac{B+C}{2} \le \sin\dfrac{B+C}{2}.\cos\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{1}{2}(\sin B + \sin C)$

$\Rightarrow 2022\cos\dfrac{A}{2} \le 1011(\sin B + \sin C)$

Tương tự: $\cos\dfrac{B}{2} \le \dfrac{1}{2}(\sin A + \sin C) \Rightarrow 2020\cos\dfrac{B}{2} \le 1010(\sin A + \sin C)$

$\cos\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{2}(\sin A + \sin B) \Rightarrow 2018\cos\dfrac{C}{2} \le 1009(\sin A + \sin B)$

$\Rightarrow VP(1) \le (1010+1009)\sin A + (1011+1009)\sin B + (1010+1011)\sin C = VP(1)$

Do đó (1) xảy ra $\Leftrightarrow VT(1) = VP(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\dfrac{B-C}{2}) = 1 \\ \cos(\dfrac{C-A}{2}) = 1 \\ \cos(\dfrac{A-B}{2}) = 1 \end{cases}$ $Hay\ \ A = B = C$

Hay tam giác ABC đều.

Câu 5: (4 điểm)

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 2021$ và $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_n = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \cdots + \dfrac{1}{u_n}$.

Tính $\lim v_n$.

Lời giải

Ta chứng minh dãy số tăng, thật vậy $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 \ge 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Giả sử dãy số bị chặn trên, suy ra dãy số có giới hạn, đặt $\lim u_n = x$.

Do dãy số tăng nên $2021 = u_1 \le u_2 \le ... \le u_n \le \Rightarrow x \ge 2021$.

Ta có $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \Rightarrow x = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x = 1$ vô lí.

Vậy dãy số tăng và không bị chặn trên hay $\lim u_n = +\infty$.

Ta có $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1)$, do $u_n \ge 2021$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{u_n(u_n-1)} = \frac{1}{u_n-1} - \frac{1}{u_n} \Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1}.$$

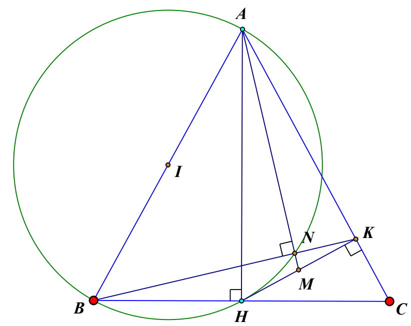
Suy ra $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_k-1} - \frac{1}{u_{k+1}-1}\right) = \frac{1}{u_1-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1}$

Hay $v_n = \dfrac{1}{u_1-1} - \dfrac{1}{u_{n+1}-1} \Rightarrow \lim v_n = \lim\left(\dfrac{1}{2020} - \dfrac{1}{u_{n+1}-1}\right) = \dfrac{1}{2020}$.

Câu 6: (2 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của đoạn BC, K là hình chiếu vuông góc của H lên AC. Biết $M\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{5}{4}\right)$ là trung điểm của đoạn HK, đường thẳng $BK: x + 7y - 13 = 0$. Gọi N là giao điểm của BK và AM. Tìm tọa độ điểm A, biết $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn AB.

Lời giải



có $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HK}$

Xét tích vô hướng: $2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BK}=(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HK})\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AK})$

$=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HK}$; (do BH vuông góc AH, HK vuông góc AK)

$=\overrightarrow{CH}\cdot(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CK})-\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HK}$

$=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HK}=CH.CA.\cos\widehat{HCA}-CH.CK.\cos\widehat{HCK}-HA.HD.\cos\widehat{AHD}$

$=CH.CA\cdot\dfrac{CH}{CA}-CH.CK\cdot\dfrac{CK}{CH}-HA.HK\cdot\dfrac{HK}{HA}$

$=CH^2-CK^2-HK^2=0$. Nên AM vuông góc BK tại điểm N.

Ta có $AM:7x-y=11\Rightarrow N=AM\cap BK=\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{8}{5}\right)$.

Ta có B là giao điểm của đương thẳng BK và đường tròn tâm I bán kính IN:

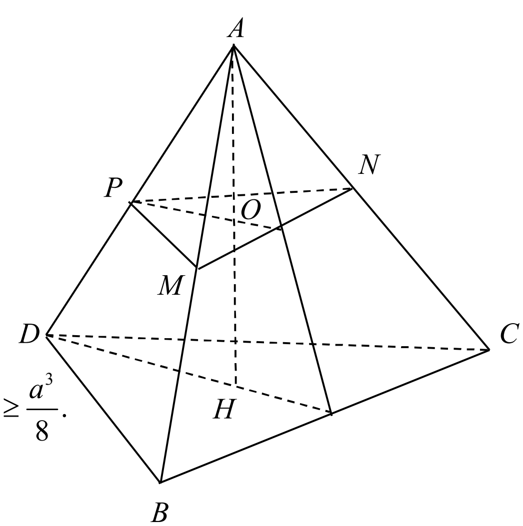
$\Rightarrow B(13-7b;b):IB=IN=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\Rightarrow\left(\dfrac{25}{2}-7b\right)^2+\left(b-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{10}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{8}{5}\\b=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}B=\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{8}{5}\right),(l)\\B=(-1;2)\end{array}\right.$

Suy ra điểm $A=(2;3)$.

Câu 7: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) và O là trung điểm của đoạn AH. Gọi (α) là mặt phẳng qua O và không đi qua các điểm A,B,C và D. Mặt phẳng (α) cắt các đoạn AB,AC và AD lần lượt tại M,N và P. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM.AN.AP$ theo a.

Lời giải



Ta có H là trọng tâm tam giác BCD nên

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AH}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=6\overrightarrow{AO}$

$\Rightarrow\dfrac{a}{AM}.\overrightarrow{AB}+\dfrac{a}{AN}.\overrightarrow{AC}+\dfrac{a}{AP}.\overrightarrow{AD}=6\overrightarrow{AO}$

Do O,M,N,P đồng phẳng nên

$\Rightarrow\dfrac{a}{AM}+\dfrac{a}{AN}+\dfrac{a}{AP}=6\geq\sqrt[3]{\dfrac{a^3}{AM.AN.AP}}\Rightarrow AM.AN.AP\geq\dfrac{a^3}{8}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM.AN.AP=\dfrac{a^3}{8}$.

Câu 8: (2 điểm)

Cho hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+2021x$, gọi a,b,c là các số thực dương sao cho phương trình $f\left[(a+b+c)x\right]+f(2020-3x)=0$ vô nghiệm.

Tìm GTNN của biểu thức $M=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{ab+bc+ac}$.

Lời giải

$f'(x)=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}+2021=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+2021>0,\forall x\in\mathbb{R}.$ Hay hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Xét

$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)-2021x=\ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)-2021x=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-2021x=-f(x)$

, hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Do đó phương trình

$f\left[(a+b+c)x\right]+f(2020-3x)=0\Leftrightarrow f\left[(a+b+c)x\right]=f(3x-2020)$.

$\Leftrightarrow (a+b+c)x=3x-2020$

$\Leftrightarrow (a+b+c-3)x=-2020$. Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow a+b+c-3=0\Leftrightarrow a+b+c=3$.

$\Leftrightarrow 2(ab+bc+ca)=9-\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Áp dạng BĐT Cô-si cho 3 số:

$$\begin{cases}\sqrt{a}+\sqrt{a}+a^2\ge 3a\\ \sqrt{b}+\sqrt{b}+b^2\ge 3b\\ \sqrt{c}+\sqrt{c}+c^2\ge 3c\end{cases}\Rightarrow 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+a^2+b^2+c^2\ge 3(a+b+c)=9$$

Hay $2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\ge 9-\left(a^2+b^2+c^2\right)=2(ab+bc+ca)$

Vậy $M=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{ab+bc+ac}\ge 1$, dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.