SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 12 THPT
NĂM HỌC 2020 - 2021

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút.

Câu 1.*(2,5 điểm)* Cho hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ có đồ thị là đường cong (C) và đường thẳng $d: y=2x+m$. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm A,B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{7}$ (với O là gốc tọa độ).

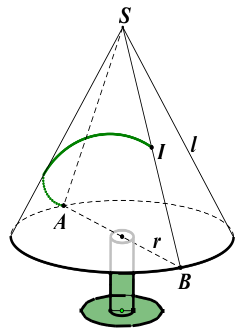
Câu 2. *(2,5 điểm)* Một hộp đựng 20 tấm thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 20. Một người rút ngẫu nhiên cùng lúc 3 tấm thẻ. Tính xác suất để bất kì hai trong ba tấm thẻ lấy ra có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất hai đơn vị.

Câu 3. *(2,5 điểm)* Cho hàm số bậc ba $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in R$, biết $4a+c>2b+8$ và $2a+4b+8c+1<0$. Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)|$.

Câu 4. *(2,5 điểm)* Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi, tam giác ABD đều cạnh a, tam giác BCD cân tại C và $\widehat{BCD}=120°$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=\sqrt{2}a$. Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB,SC,SD lần lượt tại M,N,P. Tính thể tích khối chóp $S.AMNP$.

Câu 5. *(2,0 điểm)* Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=4-x^2$. Tìm m để hàm số $y=f(x^2+x)+m\left(2\ln x-\dfrac{1}{x}\right)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 6. *(2,0 điểm)* Phần trên của một cây thông Noel có dạng hình nón, đỉnh S, độ dài đường sinh $l=2\text{m}$ và bán kính đáy $r=1\text{m}$. Biết rằng AB là một đường kính đáy của hình nón và I là trung điểm đoạn thẳng SB (*tham khảo hình vẽ*). Để trang trí, người ta lắp một dây bóng nháy trên mặt ngoài của cây thông từ vị trí A đến I. Tính độ dài ngắn nhất của dây bóng nháy.



Câu 7. *(2,0 điểm)* Cho phương trình $x^2+(m+2)x+4=(m-1)\sqrt{x^3+4x}$ với m là tham số thực. Tìm m để phương trình đã cho có 4 nghiệm thực phân biệt.

Câu 8. *(2,0 điểm)* Cho hàm số $y=f(x)=\sqrt{1+x^2}+x$. Tìm m để bất phương trình

$$(x-m)f(x-m)+\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{f\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}\le 0$$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;1]$.

Câu 9. *(2,0 điểm)* Cho các số thực $a,b,c\in[4;8]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F=a^2+b^2+c^2-\frac{1}{4}\log_2^3(abc).$$

-------HẾT ------

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh: ....Số báo danh:……………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ TĨNH	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2020-2021 - Môn: TOÁN

HƯỚNG DẪN CHẤM

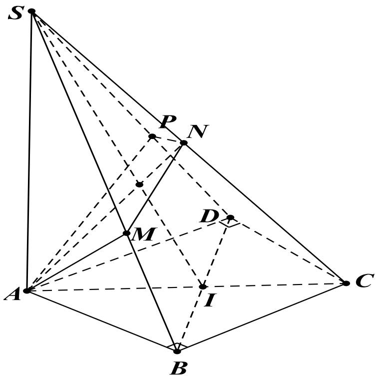
(Hướng dẫn chấm gồm có 4 trang)

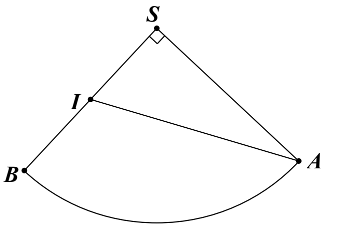
I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- Mọi cách giải khác đáp án, mà đúng và đủ các bước đều cho điểm tương ứng;
- Ban Giám khảo có thể thống nhất phân chia các ý để cho điểm đến 0.25;
- Điểm toàn bài không quy tròn.

II. ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu	NỘI DUNG	Điểm
Câu 1 (2.5 đ)	Pt hoành độ giao điểm của d và (C) $\frac{-2x+1}{x+1}=2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+(m+4)x+m-1=0(*) \\ x\neq -1 \end{cases}$ $\quad \Delta = m^2+24>0, \forall m \in R.$	0.5
	$\lvert x_A-x_B\rvert=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}=\frac{\sqrt{m^2+24}}{2}$; $\lvert y_A-y_B\rvert=\lvert 2x_A-2x_B\rvert$ $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{5}\lvert x_A-x_B\rvert=\frac{\sqrt{5(m^2+24)}}{2}$	0.5
	$d(O,AB)=\frac{\lvert m\rvert}{\sqrt{5}}$	0.5
	$S_{\Delta OAB}=\sqrt{7} \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(O,AB).AB=\sqrt{7} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{\lvert m\rvert}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5(m^2+24)}}{2}=\sqrt{7}$	0.5
	$\Leftrightarrow m^4+24m^2-112=0 \Leftrightarrow m=\pm 2.$	0.5
Câu 2 (2.5đ)	Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có $n(\Omega)=C_{20}^3=1140$.	1.0
	Gọi A là biến cố rút được ba tấm thẻ sao cho bất kì hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất hai đơn vị. Biến cố $\overline{A}$ xảy ra khi có các trường hợp sau: TH 1. Chọn ra 3 tấm thẻ ghi số liên tiếp có 18 cách.	0.5
	TH2. Chọn ra 3 tấm thẻ trong đó có đúng 2 tấm thẻ ghi số liên tiếp: Nếu hai tấm thẻ liên tiếp đó đánh số 1,2 và 19,20 thì có 17 cách chọn tấm thẻ còn lại. Nếu hai tấm thẻ đó bắt đầu từ cặp số 2,3 đến cặp số 18,19 thì mỗi cặp số sẽ có 16 cách chọn tấm thẻ còn lại. Vậy TH 2 có $2.17+17.16=306$ cách. Suy ra $n(\overline{A})=18+306=324$	0.5
	Suy ra $P(\overline{A})=\frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\frac{324}{1140}=\frac{27}{95}$, suy ra $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{68}{95}$	0.5
Câu 3 (2.5 đ)	Ta có $4a-2b+c-8>0 \Rightarrow f(-2)>0$ $2a+4b+8c+1<0 \Leftrightarrow 8\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\right)<0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)<0$	0.5
	Ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, nên tồn tại số $p>\frac{1}{2}$ sao cho $f(p)>0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, nên tồn tại số $q<-2$ sao cho $f(q)<0$	0.5

	Ta có $f(q).f(-2)<0;\ f(-2).f\left(\frac{1}{2}\right)<0;\ f\left(\frac{1}{2}\right)f(p)<0$ Suy ra $f(x)=0$ có 3 nghiệm thuộc các khoảng $(q;-2);\left(-2;\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};p\right)$	0,5
	Nên hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị	0,5
	Suy ra $g(x)=\lvert f(x)\rvert$ có 5 điểm cực trị.	0,5
Câu 4 (2.5 đ)	 Tam giác ICD: $IC=ID.\cot 60°=\frac{a\sqrt{3}}{6}; AI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. $\Rightarrow AC=AI+IC=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$	0,5
	Tam giác SAC vuông tại A có $\frac{SN}{SC}=\frac{SA^2}{SC^2}$ $\Rightarrow \frac{SN}{SC}=\frac{SA^2}{SA^2+AC^2}=\frac{3}{5}$.	0,5
	Tam giác ABC vuông tại B $\Rightarrow BC\perp(SAB)$; $\Rightarrow BC\perp AM$ Mặt khác $AM\perp SC$, nên $AM\perp(SBC)$, suy ra $AM\perp SB$ Trong tam giác vuông SAB ta có $\frac{SM}{SB}=\frac{SA^2}{SB^2}$ $\Rightarrow \frac{SM}{SB}=\frac{SA^2}{SA^2+AB^2}=\frac{2}{3}$	0.5
	Tương tự $\frac{SP}{SD}=\frac{SM}{SB}=\frac{2}{3}$ Khi đó $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=\frac{3}{5}.\frac{2}{3}=\frac{2}{5}\Rightarrow V_{S.AMN}=\frac{1}{5}V_{S.ABCD}$. Tương tự $V_{S.ANP}=\frac{1}{5}V$. Suy ra $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{2}{5}$	0,5
	$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD=\frac{1}{2}.a.\frac{2a\sqrt{3}}{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. Suy ra $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{3}=\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$. Vậy $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{2}{5}\Rightarrow V_{S.AMNP}=\frac{2a^3\sqrt{6}}{45}$.	0.5
Câu 5. (2.0đ)	Ta có $y=f(x^2+x)+m\left(2\ln x-\frac{1}{x}\right)$. Suy ra $y'(x)=(2x+1)f'(x^2+x)+\frac{m(2x+1)}{x^2}$	0.5
	Hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$ khi $y'(x)\le 0\ \ \forall x\in(1;+\infty)$. Hay $(2x+1)\left[f'(x^2+x)+\frac{m}{x^2}\right]\le 0\ \ \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow f'(x^2+x)+\frac{m}{x^2}\le 0\ \ \forall x\in(1;+\infty)$.	0.5
	Suy ra $m\le -x^2.f'(x^2+x)=x^2\left((x^2+x)^2-4\right)=x^6+2x^5+x^4-4x^2$ với $\forall x\in(1;+\infty)$ Đặt $g(x)=x^6+2x^5+x^4-4x^2$, $g'(x)=6x^5+10x^4+4x^3-8x=2x(3x^4+5x^3+2x^2-4)$	0.5
	Do $x\in(1;+\infty)$ suy ra $3x^4+5x^3+2x^2-4>0$ suy ra $g'(x)>0$, suy ra $g(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ Suy ra $m\le g(x)$ với $\forall x\in(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $m\le g(1)=0$	0.5

<table>
<tr>
<td rowspan="4">Câu 6
(2.0đ)</td>
<td>
</td>
<td>Khi lắp dây bóng từ A đến I trên mặt nón sẽ có hai hướng, do tính đối xứng nên ta chỉ xét một hướng.
Trải một nửa mặt nón lên mặt phẳng ta được một hình quạt (như hình vẽ)
Độ dài ngắn nhất của dây bóng nháy bằng AI</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Cung $\overset{\frown}{AB}$ là nửa đường tròn đáy nên $l_{\overset{\frown}{AB}} = \pi\left(m\right)$</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Số đo góc $\widehat{ASB}$: $\alpha = \dfrac{l_{\overset{\frown}{AB}}}{SA} = \dfrac{l_{\overset{\frown}{AB}}}{l} = \dfrac{\pi}{2}$</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$\Rightarrow AI = \sqrt{SA^2 + SI^2} = \sqrt{5}\left(m\right)$</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="4">Câu 7
(2.0đ)</td>
<td colspan="2">Điều kiện: $x \ge 0$.
Nhận xét $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, suy ra $x > 0$, ta có
$x^2 + (m+2)x + 4 = (m-1)\sqrt{x^3 + 4x} \Leftrightarrow x + \dfrac{4}{x} - (m-1)\sqrt{x + \dfrac{4}{x}} + m + 2 = 0$ (1)</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Đặt $\sqrt{x + \dfrac{4}{x}} = t$ xét $t(x) = \sqrt{x + \dfrac{4}{x}}$ ta có $t'(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2 + 4}}$,
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>t'</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$t = \sqrt{x + \dfrac{4}{x}}$</td><td>$+\infty$</td><td>$\searrow$</td><td>$2$</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>
Với $t \ge 2$ phương trình (1) trở thành $t^2 - (m-1)t + m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2 + t + 2}{t - 1}$ (2)</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Xét hàm số $m(t) = \dfrac{t^2 + t + 2}{t - 1}$ với $t \ge 2$ ta có $m'(t) = \dfrac{t^2 - 2t - 3}{(t-1)^2}$
<table>
<tr><td>t</td><td>2</td><td></td><td>3</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$m'(t)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$m(t) = \dfrac{t^2 + t + 2}{t - 1}$</td><td>$8$</td><td>$\searrow$</td><td>$7$</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table></td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Dựa vào hai bảng biến thiên ta có: Phương trình đã cho có 4 nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm t > 2 . Suy ra $7 < m < 8$.</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">Câu 8.
(2.0đ)</td>
<td colspan="2">Ta xét $f\left(-x\right) = \sqrt{1 + \left(-x\right)^2} + \left(-x\right) = \sqrt{1 + x^2} - x = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x} = \dfrac{1}{f\left(x\right)}$ Vậy $f\left(-x\right) = \dfrac{1}{f\left(x\right)}$</td>
<td>0,5</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Suy ra $\left(x - m\right)f\left(x - m\right) + \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{f\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)} \le 0 \Leftrightarrow \left(x - m\right)f\left(x - m\right) \le -\dfrac{\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)}{f\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)}$
$\Leftrightarrow \left(x - m\right)f\left(x - m\right) \le \left(-1 - \sqrt{1 - x^2}\right)f\left(-1 - \sqrt{1 - x^2}\right)(1)$</td>
<td>0,5</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Xét $g\left(t\right) = t.f\left(t\right) = t\left(\sqrt{1 + t^2} + t\right) = t\sqrt{t^2 + 1} + t^2$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

$g'(t)=\sqrt{1+t^2}+\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}+2t\ge 2\sqrt{\sqrt{1+t^2}.\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}+2t=2\sqrt{t^2}+2t$ (BĐT Cauchy)

$\Rightarrow g'(t)\ge 2|t|+2t\ge 0$, Vậy hàm số $g(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

0,5

$(1)\Leftrightarrow g(x-m)\le g\left(-1-\sqrt{1-x^2}\right)\Leftrightarrow x-m\le -1-\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow m\ge x+1+\sqrt{1-x^2}$

Để (1) luôn đúng ta phải có $m\ge \underset{[-1;1]}{Max}\left(x+1+\sqrt{1-x^2}\right)$

Đặt $h(x)=x+1+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow h'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. $h'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Từ đó suy ra $\underset{[-1;1]}{Max}\left(x+1+\sqrt{1-x^2}\right)=1+\sqrt{2}$. Vậy $m\ge 1+\sqrt{2}$.

0,5

Câu 9 (2.0đ)

Xét hàm số $f(x)=x^2-48\log_2 x+80$ trên $[4;8]$ ta có

$f'(x)=2x-\dfrac{48}{x\ln 2}=\dfrac{(2\ln 2)x^2-48}{x\ln 2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{24}{\ln 2}}\ (=x_0)$

x	4		x_0		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	0

$\Rightarrow x^2-48\log_2 x+80\le 0\Rightarrow x^2\le 48\log_2 x-80, \forall x\in[4;8]$

0.5

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-\dfrac{1}{4}\log_2^3(abc)\le 48(\log_2 a+\log_2 b+\log_2 c)-240-\dfrac{1}{4}\log_2^3(abc)$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-\dfrac{1}{4}\log_2^3(abc)\le 48\log_2(abc)-240-\dfrac{1}{4}\log_2^3(abc)$

0.5

$a,b,c\in[4;8]\Rightarrow \log_2 a,\log_2 b,\log_2 c\in[2;3]\Rightarrow \log_2(abc)\in[6;9]$

Xét hàm số $g(x)=48x-240-\dfrac{1}{4}x^3$ trên $[6;9]$ ta có

$g'(x)=48-\dfrac{3}{4}x^2$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=8$

x	6		8		9
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	16	$\searrow$	

Suy ra $g(x)\le 16$

0,5

$a^2+b^2+c^2-\dfrac{1}{4}\log_2^3(abc)\le 48\log_2(abc)-240-\dfrac{1}{4}\log_2^3(abc)\le 16$

Dấu bằng xảy ra khi $abc=256$ và $\log_2 a$, $\log_2 b$, $\log_2 c$ nhận giá trị bằng 2 hoặc 3.

Suy ra $a=b=8, c=4$; $a=c=8, b=4$ hoặc $c=b=8, a=4$

Vậy $maxF=16$

0.5

……………………….HẾT…………………