SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12**
BÌNH ĐỊNH	**KHÓA NGÀY: 22 – 10 – 2019**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: **22/10/2019**

Bài 1. *(2,0 điểm)*

Giải phương trình $x^2+\sqrt{2x+5}+\sqrt{4-2x}=4x-1$.

Bài 2. *(3,0 điểm)*

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$u_1=\sqrt{2-\sqrt{2}},\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\ \text{ với mọi } n=1,2,\ldots.$$

Tính $\lim\left(2^n\sqrt{2-u_n}\right)$.

Bài 3. *(3,0 điểm)*

Cho hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)=aP(x)+bP'(x)$ với a,b là các số thực và $a\neq 0$. Chứng minh rằng nếu đa thức $Q(x)$ vô nghiệm thì đa thức $P(x)$ cũng vô nghiệm.

Bài 4. *(5,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $a^2+b^2+c^2$ với a,b,c là các số tự nhiên sao cho $a^4+b^4+c^4$ chia hết cho p.
2. Trên bảng kẻ ô vuông $2\times n$ ghi các số dương sao cho tổng của hai số trong mỗi cột bằng 1. Chứng minh rằng có thể bỏ đi một số trong mỗi cột để trên mỗi hàng các số còn lại có tổng không vượt quá $\dfrac{n+1}{4}$.

Bài 5. *(7,0 điểm)*

1. Cho tam giác ABC $(AC<BC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Phân giác góc C cắt đường tròn (O) tại R. Gọi K,L lần lượt là trung điểm của AC và BC. Đường vuông góc với AC tại K cắt CR tại P, đường vuông góc với BC tại L cắt CR tại Q. Chứng minh rằng diện tích của các hình tam giác RPK và RQL bằng nhau.
2. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA,SB,SC đôi một vuông góc. Gọi R và r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp; V là thể tích khối chóp và h là đường cao của hình chóp từ đỉnh S. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\dfrac{V(h-r)}{R^2rh}$.

--------------- **HẾT** ---------------

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. (2 điểm)

Giải phương trình $x^2+\sqrt{2x+5}+\sqrt{4-2x}=4x-1.$

Lời giải

Điều kiện: $-\dfrac{5}{2}\le x\le 2.$

Phương trình đã cho tương đương

$$x^2+\sqrt{2x+5}+\sqrt{4-2x}-4x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+5}-3\right)+\sqrt{4-2x}+x^2-4x+4=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-2)}{\sqrt{2x+5}+3}+\sqrt{2(2-x)}+(x-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x}\left[-\frac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2x+5}+3}+\sqrt{2}+(2-x)\sqrt{2-x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2-x}=0\\ (2-x)\sqrt{2-x}+\sqrt{2}-\dfrac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2x+5}+3}=0\end{array}\right. \ (*).$$

Vì $x\ge -\dfrac{5}{2}$ nên $\sqrt{2x+5}+3\ge 3\Leftrightarrow -\dfrac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2x+5}+3}\ge -\dfrac{2}{3}\sqrt{2-x}\ge -\dfrac{2}{3}\sqrt{2-\left(-\dfrac{5}{2}\right)}=-\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2x+5}+3}\ge 0,\forall x\ge -\frac{5}{2}\ (1).$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=-\dfrac{5}{2}$.

Mặt khác, do $x\le 2$ nên $(2-x)\sqrt{2-x}\ge 0,\forall x\le 2$ (2).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=2$.

Từ (1) và (2) suy ra:

$(2-x)\sqrt{2-x}+\sqrt{2}-\dfrac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2x+5}+3}>0$ (do dấu "=" không đồng thời xảy ra).

Khi đó $(*)\Leftrightarrow \sqrt{2-x}=0\Leftrightarrow x=2$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{2\}$.

Bài 2. (3 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$u_1=\sqrt{2-\sqrt{2}},\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n},\ \text{với mọi } n=1,2,....$$

Tính: $\lim\left(2^n\sqrt{2-u_n}\right)$.

Lời giải

$$u_1=\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2+2\cos\frac{3\pi}{4}}=2\cos\frac{3\pi}{8}=2\cos\frac{3\pi}{2^3}.$$

Đặt $u_n=2\cos\varphi,\ \varphi\in(0;\pi)\Rightarrow u_{n+1}=\sqrt{2+2\cos\varphi}\Rightarrow u_{n+1}=2\cos\dfrac{\varphi}{2}$.

Do đó ta có: $u_2=2\cos\dfrac{3\pi}{2^4},\ u_3=2\cos\dfrac{3\pi}{2^5},\ldots\ldots,u_n=2\cos\dfrac{3\pi}{2^{n+2}}$.

Suy ra $\lim\left(2^n\sqrt{2-u_n}\right)=\lim\left(2^n\sqrt{2-2\cos\frac{3\pi}{2^{n+2}}}\right)=\lim\left(2^n.2.\sin\frac{3\pi}{2^{n+3}}\right)=\lim\frac{\sin\frac{3\pi}{2^{n+3}}}{\frac{3\pi}{2^{n+3}}}.\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

Bài 3. (3 điểm)

Cho đa thức $P(x)$ và $Q(x)=aP(x)+bP'(x)$ với a,b là các số thực và $a\neq 0$. Chứng minh rằng nếu đa thức $Q(x)$ vô nghiệm thì đa thức $P(x)$ cũng vô nghiệm.

Lời giải

Nếu $b=0$ ta có ngay điều phải chứng minh.

Ta xét các trường hợp sau đây với $b\neq 0$.

Dễ thấy hai đa thức $Q(x),P(x)$ cùng bậc.

Mà $Q(x)$ vô nghiệm nên hai đa thức $Q(x),P(x)$ bậc chẵn.

TH1: Nếu $P(x)$ có nghiệm bội $x=x_0$ thì x_0 cũng là nghiệm của $Q(x)=aP(x)+bP'(x)$ (mâu thuẫn với giả thiết).

TH2: Nếu $P(x)$ có hai nghiệm đơn liền nhau $x_0<x_1$ thì $P'(x_0).P'(x_1)<0$.

Mặt khác: $\begin{cases}Q(x_0)=aP(x_0)+bP'(x_0)=bP'(x_0)\\Q(x_1)=aP(x_1)+bP'(x_1)=bP'(x_1)\end{cases}\Rightarrow Q(x_0)Q(x_1)=b^2P'(x_0)P'(x_1)<0$.

$Q(x)$ là đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó theo trên suy ra $Q(x)$ có nghiệm $x_2\in(x_0,x_1)$ (mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy nếu đa thức $Q(x)$ vô nghiệm thì đa thức $P(x)$ cũng vô nghiệm. (đpcm)

Bài 4 . (5 *điểm*)

1. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $a^2+b^2+c^2$ với a,b,c là các số tự nhiên sao cho $a^4+b^4+c^4$ chia hết cho p .

Lời giải

Nhận xét: do p là số nguyên tố nên trong 3 số a,b,c phải có ít nhất 2 số không nhỏ hơn 1.

Theo đề bài, ta cần tìm số nguyên tố p có dạng sau:

$$p=a^2+b^2+c^2 \text{ với } a,b,c\in\mathbb{N}.$$

Do a,b,c có vai trò như nhau nên không giảm tổng quát, ta có thể giả sử $c=min\{a,b,c\}$.

Rõ ràng $p\,|\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$. Khai triển ta có $p\,|\left(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2\right)$.

Theo giả thiết ban đầu ta có $a^4+b^4+c^4$ chia hết cho p .

Do đó ta suy ra được $p\,|\left(2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2\right)$. Xảy ra 2 trường hợp như sau:

<u>Trường hợp 1:</u> $p\,|\,2$.

Trong trường hợp này, hiển nhiên $p=2$ là giá trị duy nhất thỏa yêu cầu bài toán. Khi đó $(a,b,c)=(1,1,0)$ và các hoán vị của chúng là các giá trị thỏa mãn đề bài.

<u>Trường hợp 2</u>: $p\,|\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)$. (1)

Mà $p=a^2+b^2+c^2$ nên ta suy ra được $p\,|\,c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)$ hay $p\,|\left(a^2c^2+b^2c^2+c^4\right)$ (2).

Từ (1), (2) ta suy ra được $p\,|(c^4-a^2b^2)$.

Ta lại có $c^4-a^2b^2=\left(c^2+ab\right)\left(c^2-ab\right)$. Để ý rằng $0<c^2+ab<p$ và p là số nguyên tố nên $p\,|(c^4-a^2b^2)$ khi và chỉ khi $p\,|\left(c^2-ab\right)$.

Mặt khác, ta có đánh giá sau: $\left|c^2-ab\right|<\left|c^2\right|+\left|ab\right|<a^2+b^2+c^2=p$.

Vậy $p\,|\left(c^2-ab\right)$ khi và chỉ khi $c^2-ab=0$ hay $c^2=ab$. Do $c=min\{a,b,c\}$ nên dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Thay $a=b=c$ giả thiết $p=a^2+b^2+c^2$ ta được $p=3a^2$. Do p là số nguyên tố nên giá trị tự nhiên duy nhất của a thỏa yêu cầu bài toán là $a=1$. Khi đó $p=3$.

Vậy $p=2$ hoặc $p=3$ là 2 số nguyên tố duy nhất thỏa yêu cầu bài toán.

2. Cho bảng ô vuông $2\times n$ với $n\geq 3$. Hai ô của cột thứ i của bảng được điền bởi 2 số thực không a_i,b_i sao cho $a_i+b_i=1$. Chứng minh rằng có thể chọn được từ mỗi cột một số sao cho tổng các số được chọn ở mỗi hàng không vượt quá $\frac{n+1}{4}$.

Lời giải

a_1	a_2	a_3	$\ldots$	$\ldots$	a_n
b_1	b_2	b_3	$\ldots$	$\ldots$	b_n

Giả sử ta có bảng như trên với $a_1\leq a_2\leq a_3\leq\ldots\leq a_n$. Từ đó suy ra $b_1\geq b_2\geq b_3\geq\ldots\geq b_n$. Điều này là hợp lệ vì việc đổi chỗ 2 cột cho nhau không ảnh hưởng gì đến kết luận của bàn toán.

Khi đó gọi k là số lớn nhất sao cho $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k\leq\frac{n+1}{4}$. Ta sẽ chứng tỏ $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k$ và $b_{k+1},b_{k+2},b_{k+3},\ldots,b_n$ là các số cần chọn.

Như vậy ta cần chỉ ra rằng $b_{k+1}+b_{k+2}+b_{k+3}+\ldots+b_n\leq\frac{n+1}{4}$ (*). Theo định nghĩa của số k thì ta có $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k+a_{k+1}>\frac{n+1}{4}$ nên suy ra $(k+1)a_{k+1}>\frac{n+1}{4}\Leftrightarrow a_{k+1}>\frac{n+1}{4(k+1)}$.

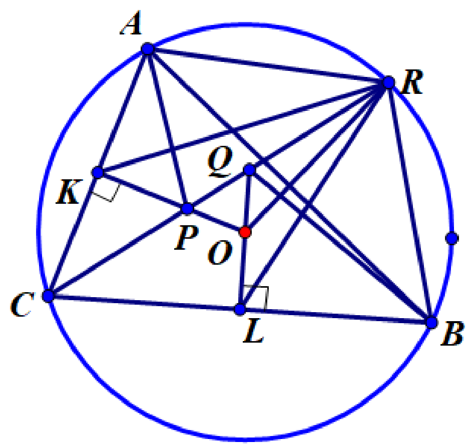
Để có (*), ta sẽ chứng minh $(n-k)b_{k+1}\leq\frac{n+1}{4}$ hay $(n-k)(1-a_{k+1})\leq\frac{n+1}{4}$, ta đưa về

$$(n-k)\left(1-\frac{n+1}{4(k+1)}\right)\leq\frac{n+1}{4}\Leftrightarrow(n-2k-1)^2\geq 0$$

BĐT trên là hiển nhiên nên ta có đpcm.

Bài 5 . (*7 điểm*)

1. Cho tam giác ABC $(AC<BC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Phân giác góc C cắt đường tròn (O) tại R. Gọi K,L lần lượt là trung điểm của AC và BC. Đường vuông góc với AC tại K cắt CR tại P, đường vuông góc với BC tại L cắt CR tại Q. Chứng minh rằng diện tích tam giác RPK và RQL bằng nhau.



Lời giải

Ta có: $S_{RPK}=\frac{1}{2}RP.PK.\sin RPK; S_{RQL}=\frac{1}{2}RQ.QL.\sin RQL$

Dễ thấy $CPK=CQL=90^0-\frac{C}{2}\Rightarrow RPK=RQL$.

Vậy $S_{RPK} = S_{RQL} \Leftrightarrow RP.PK = RQ.QL$ (1)

+ Ta sẽ chứng minh $RQ = CP$ và $RP = CQ$

Xét hai tam giác RPA và RQB

Có $RAB = RCA = PAC \Rightarrow RAP = CAB \Rightarrow RAP = QRB$; $RA = RB$

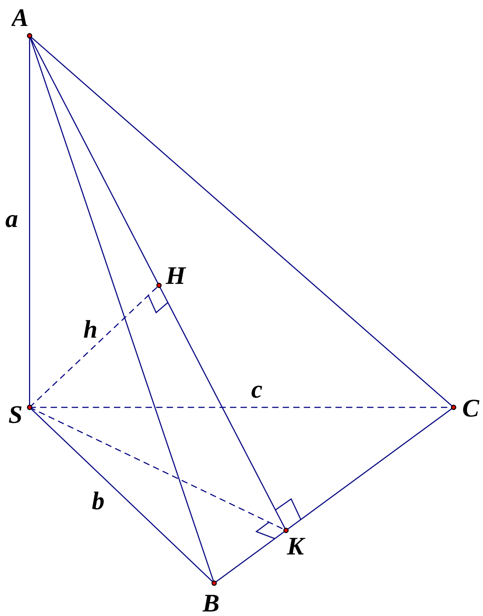
$APC = 2KPC = 2CQL = CQB \Rightarrow APR = RQB \Rightarrow ARP = RBQ$

Vậy hai tam giác RPA và RQB bằng nhau (g.c.g), suy ra $RQ = PA \Rightarrow RQ = PC$, từ đó cũng suy ra $RP = CQ$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow CQ.PK = CP.QL \Leftrightarrow \dfrac{CQ}{CP} = \dfrac{QL}{PK}$, điều này đúng do hai tam giác vuông CQL và CPK đồng dạng với nhau, suy ra điều phải chứng minh.

2. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Gọi R, r lần lượt là tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$; V là thể tích khối chóp $S.ABC$ và h là chiều cao của khối chóp $S.ABC$ hạ từ đỉnh S. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{V(h-r)}{R^2hr}$.

Lời giải



Đặt $SA = a, SB = b, SC = c$. Kẻ $SH \perp BC$ tại K, $SH \perp SK$ tại $H \Rightarrow SH = h$.

+) Ta có $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \Rightarrow h = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

+) Vì $S.ABC$ có ba góc tại đỉnh S là các góc vuông nên ta có: $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ và $V = \dfrac{1}{6}abc$.

+) Lại có $SK = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow AK = \sqrt{a^2 + \dfrac{b^2c^2}{b^2 + c^2}} = \dfrac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.

Suy ra $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AK = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$.

Khi đó $r = \dfrac{3V}{S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SCA} + S_{\Delta ABC}} = \dfrac{abc}{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

+) $\dfrac{V(h-r)}{R^2hr}=\dfrac{\dfrac{1}{6}abc\left(\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}-\dfrac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\right)}{\dfrac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right).\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.\dfrac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}}$

$\Rightarrow \dfrac{V(h-r)}{R^2hr}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\le\dfrac{2}{3}$ vì $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2\ \forall a,b,c$ dương.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Vậy $\max\dfrac{V(h-r)}{R^2hr}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow a=b=c$.

-------------------- HẾT --------------------