

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỶ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT
NĂM HỌC 2020 – 2021

Môn thi: TOÁN

Ngày thi thứ nhất: 24/09/2020

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Đề thi gồm có 01 trang

Bài 1. (5,0 điểm)

Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x + z = 2y + (a + b) \\ 3x^2 + 3xz = y^2 + 2(a + b)y + ab \\ x^3 + 3x^2z = y^2(a + b) + 2yab \end{cases}$$

Bài 2. (5,0 điểm)

Cho dãy số thực dương $(a_n)_{n \geq 1}$ thỏa mãn điều kiện: $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} < 4a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 3. (5,0 điểm)

Giả sử O , I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC với bán kính R , r tương ứng. Gọi P là điểm chính giữa cung \widehat{BAC} , QP là đường kính của (O) , D là giao điểm của PI và BC , F là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AID với đường thẳng PA . Lấy E trên tia DP sao cho $DE = DQ$.

a) Chứng minh rằng $\widehat{IDF} = 90^\circ$.

b) Giả sử $\widehat{AEF} = \widehat{APE}$, chứng minh rằng $\sin^2 \widehat{BAC} = \frac{2r}{R}$.

Bài 4. (5,0 điểm)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho S là tập hợp các điểm $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

i) $x, y \in \mathbb{N}$.

ii) $0 \leq y \leq x \leq 2020$.

a) Tính số phần tử của S .

b) Hỏi có bao nhiêu tập con A gồm 2020 phần tử của S sao cho A không chứa hai điểm $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$ thỏa mãn:

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) = 0?$$