

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: **Toán**

Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: **18/8/2018**

MA TRẬN ĐỀ

Mức độ nhận thức	Thông hiểu	Vận dụng thấp	Vận dụng cao	Tổng cộng	
Câu/ phần (chương trình gì)					
Câu 1: Hệ phương trình	3			3,0 điểm	PT
Câu 2: Chứng minh hệ thức lượng giác trong tam giác	3			3,0 điểm	PT
Câu 3: Dãy số truy hồi với các yêu cầu chứng minh hoặc tìm số hạng TQ hoặc tính giới hạn...		2		2,0 điểm	Chuyên
Câu 4: Tổ hợp		3		3,0 điểm	PT
Câu 5: Hình học phẳng 1) Chứng minh tính chất hình học		3		3,0 điểm	PT
2) Vận dụng các kiến thức chuyên			2	2,0 điểm	Chuyên
Câu 6: Số học			2	2,0 điểm	Chuyên
Câu 7: Bất đẳng thức			2	2,0 điểm	PT
Tổng	6,0 điểm	8,0 điểm	6,0 điểm	20 điểm	

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: **Toán**

Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: **18/8/2018**

(Đề này có 1 trang, gồm 7 câu).

Câu 1. (3,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y+1} \\ x^2 + x + 12\sqrt{y+1} = 36 \end{cases}$$

Câu 2. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A , đặt $BC = a, AC = b, AB = c$. Cho biết $a, \sqrt{\frac{2}{3}}b, c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Tính B, C .

Câu 3. (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 3 \\ u_{n+2} + u_n = 2(u_{n+1} + 1), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
 Tính

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2}.$$

Câu 4. (3,0 điểm) Có 20 cây giống trong đó có 2 cây xoài, 2 cây mít, 2 cây ổi, 2 cây bơ, 2 cây bưởi và 10 loại cây khác 5 loại trên đồng thời đôi một khác loại nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 cây để trồng trong một khu vườn sao cho không có hai cây nào thuộc cùng một loại.

Câu 5. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB > AC$) là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn (O) , H là trực tâm tam giác. Gọi J là trung điểm của BC . Gọi D là điểm đối xứng với A qua O .

1) (3,0 điểm) Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên BC, CH, BH . Chứng minh rằng tứ giác $PJMN$ nội tiếp.

2) (2,0 điểm) Cho biết $\widehat{BAC} = 60^\circ$, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $2\widehat{AHI} = 3\widehat{ABC}$.

Câu 6. (2,0 điểm) Tìm tất cả các số nguyên tố a thỏa mãn $8a^2 + 1$ cũng là số nguyên tố.

Câu 7. (2,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $3a^2 + 2b^2 + c^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(a + b + c) - abc$.

-----HẾT-----

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: Toán

Ngày thi: 18/8/2018

(Bản hướng dẫn gồm 05 trang)

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

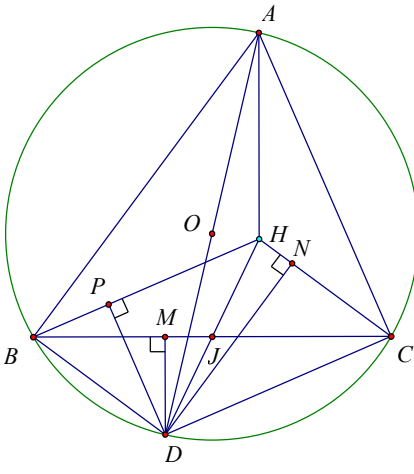
I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa ở phần điểm tương ứng.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Câu 5 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì không cho điểm.

II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

CÂU	Ý	NỘI DUNG	ĐIỂM
1 (3,0 đ)		Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y+1} & (1) \\ x^2 + x + 12\sqrt{y+1} = 36 & (2) \end{cases}$	3,0
		Điều kiện: $x \geq 1, y \geq 1$.	0,25
		vì $x = y = 1$ không là nghiệm của hệ phương trình nên xét với $\begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{cases}$.	0,25
		Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} = \sqrt{y+1} - \sqrt{x+1}$ $\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}} = \frac{-(x-y)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}}$	0,5
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}} = \frac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} \end{cases} \Leftrightarrow x=y$	0,5
		Thay $x = y$ vào phương trình thứ hai (2), ta được phương trình $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36$	0,25
		$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x + 1 - 12\sqrt{x+1} + 36$ $\Leftrightarrow (x+1)^2 = (\sqrt{x+1} - 6)^2$	0,5
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 - \sqrt{x+1} + 6 = 0 \text{ (VN)} \\ x+1 + \sqrt{x+1} - 6 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 2 \\ \sqrt{x+1} = -3 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$	0,5
		Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (3; 3)$	0,25

2 (3,0 đ)	Cho tam giác ABC vuông tại A và $a, \sqrt{\frac{2}{3}}b, c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Tính B, C .	3,0
	Cho tam giác ABC vuông tại A nên ta có $b = a \sin B, c = a \cos B$	0,5
	$a, \sqrt{\frac{2}{3}}b, c$ lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow ac = \frac{2}{3}b^2$	0,5
	$\Leftrightarrow a^2 \cos B = \frac{2}{3}a^2 \sin^2 B$	0,25
	$\Leftrightarrow 3 \cos B = 2 \sin^2 B$	0,25
	$\Leftrightarrow 3 \cos B = 2 - 2 \cos^2 B \Leftrightarrow 2 \cos^2 B + 3 \cos B - 2 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos B = -2 \\ \cos B = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos B = \frac{1}{2} \text{ (vì } -1 \leq \cos B \leq 1 \text{)}$	0,25
	$\Leftrightarrow B = 60^\circ \text{ (vì } 0^\circ < B < 180^\circ \text{)}$.	0,5
	Vậy $B = 60^\circ, C = 30^\circ$.	0,25
3 (2,0 đ)	Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 3 & (1) \\ u_{n+2} + u_n = 2(u_{n+1} + 1) & (2) \end{cases} \text{ (} n \geq 1 \text{)}. \text{ Tính } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2}$.	2,0
	Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$ Ta có (2) $\Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 2 \Leftrightarrow v_{n+1} = v_n + 2$ suy ra (v_n) lập thành một cấp số cộng có $v_1 = d = 2$ Vậy $v_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$	0,5
	Khi đó $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1$ $= v_{n-1} + v_{n-2} + \dots + v_1 + u_1 = 2((n-1) + (n-2) + \dots + 1) + 1$	0,5
	$= 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 1 = n(n-1) + 1$	0,5
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1) + 1}{n^2} = 1$. Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2} = 1$.	0,5
	4 (2,0 đ)	Có 20 cây giống trong đó có 2 cây xoài, 2 cây mít, 2 cây ôi, 2 cây bơ, 2 cây bưởi và 10 loại cây khác 5 loại trên đồng thời đôi một khác loại nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 cây để trồng trong một khu vườn sao cho không có hai cây nào thuộc cùng một loại.
Số cách chọn 5 cây bất kỳ trong 20 cây giống là C_{20}^5 .		0,5
Ta tính số cách chọn 5 cây sao cho có ít nhất hai cây cùng loại. + Trường hợp 1 : Số cách chọn 4 cây thuộc 2 loại và 1 cây khác là $C_5^2 \cdot C_{16}^1$		0,5
+ Trường hợp 2: Số cách chọn có 2 cùng một loại và 3 cây khác là		0,5

		$C_5^1 \cdot C_{18}^3$	
		Vì số cách chọn ở trường hợp 2 trùng lại 2 lần cách chọn ở trường hợp 1 nên số cách chọn 5 cây sao cho có ít nhất hai cây cùng loại là $C_5^2 \cdot C_{16}^1 + (C_5^1 \cdot C_{18}^3 - 2C_5^2 \cdot C_{16}^1) = C_5^1 \cdot C_{18}^3 - C_5^2 \cdot C_{16}^1$.	0,25
		nên số cách chọn 5 cây thỏa đề là $C_{20}^5 - (C_5^1 \cdot C_{18}^3 - C_5^2 \cdot C_{16}^1) = 11584$	0,25
5 (5,0d)	1	Cho tam giác ABC ($AB > AC$) là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm tam giác. Gọi J là trung điểm của BC . Gọi D là điểm đối xứng với A qua O . 1) Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên BC, CH, BH . Chứng minh rằng tứ giác $PJMN$ nội tiếp.	3,0
			
	Ta có $BH \parallel CD$ (vì cùng vuông góc với AC) và $CH \parallel BD$ (vì cùng vuông góc với AB) nên $BHCD$ là hình bình hành, do đó J cũng là trung điểm của HD .	0,5	
	Từ giả thiết ta được tứ giác $HPDN$ nội tiếp đường tròn tâm J	0,25	
	suy ra $\widehat{PJN} = 2\widehat{PDN} = 2(180^\circ - \widehat{BHC})$ (1).	0,5	
	Ta có các tứ giác $BPMD$, $CNMD$ nội tiếp nên	0,5	
	$\widehat{PMN} = 360^\circ - (\widehat{PMD} + \widehat{NMD}) = \widehat{HBD} + \widehat{HCD}$ $= 360^\circ - (\widehat{BHC} + \widehat{BDC}) = 360^\circ - 2\widehat{BHC} \quad (2)$	0,75	
	Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PJN} = \widehat{PMN}$ nên tứ giác $PJMN$ nội tiếp. Điều phải chứng minh.	0,5	
	2	Cho biết $\widehat{BAC} = 60^\circ$, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $2\widehat{AHI} = 3\widehat{ABC}$.	2,0

	<p>Gọi L là giao điểm của AH với BC, K là giao điểm thứ hai của AH với đường tròn ngoại tiếp (O) của tam giác ABC.</p> <p>Kẻ đường thẳng đi qua I vuông góc với BC cắt BC và cắt cung nhỏ BC lần lượt tại E và N.</p> <p>Ta có $JL \parallel DK$ (vì cùng vuông góc với AK) mà J là trung điểm của HD nên JL là đường trung bình của tam giác HDK, suy ra L là trung điểm của HK. Do đó K đối xứng với H qua đường thẳng BC suy ra $\widehat{BHC} = \widehat{BKC} = 120^\circ$.</p>	0,75
	<p>Mà $\widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 120^\circ$ nên B, I, H, C đồng viên thuộc đường tròn đối xứng với (O) qua BC, suy ra N chính là điểm đối xứng với I qua BC. Suy ra $HINK$ là hình thang cân.</p>	0,5
	<p>Ta có $\widehat{ABI} = \widehat{IBC} = \widehat{CBN} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$.</p>	0,25
	<p>Từ đó</p> $\widehat{AHI} = 180^\circ - \widehat{IHK} = 180^\circ - \widehat{AKN} = \widehat{ABN} = \widehat{ABI} + \widehat{IBC} + \widehat{CBN} = \frac{3}{2} \widehat{ABC}$ <p>suy ra $2\widehat{AHI} = 3\widehat{ABC}$. Điều phải chứng minh.</p>	0,5
6 (2đ)	<p>Tìm tất cả các số nguyên tố a thỏa mãn $8a^2 + 1$ cũng là số nguyên tố.</p>	2,0
	<p>Vì a là số nguyên tố nên $a \geq 2$. Ta xét các trường hợp</p>	0,25
	<p>Trường hợp 1: với $a = 2$ khi đó $8a^2 + 1 = 33$ chia hết cho 11 loại trường hợp $a = 2$</p>	0,5
	<p>Trường hợp 2: với $a = 3$ khi đó $8a^2 + 1 = 73$ là số nguyên tố</p>	0,5
	<p>Trường hợp 3: với $a > 3 \Rightarrow a = 3k \pm 1$ khi đó $8a^2 + 1 = 8(9k^2 \pm 6k + 1) + 1 = 3(24k^2 \pm 16k + 3)$ chia hết cho 3 loại trường hợp $a > 3$</p>	0,5
	<p>Vậy $a = 3$ là giá trị duy nhất cần tìm.</p>	0,25
5 (2,0đ)	<p>Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $3a^2 + 2b^2 + c^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức</p>	2,0

		$P = 2(a + b + c) - abc .$	
		<p>Với bốn số a, b, x, y ta có bất đẳng thức Cauchy-Schwarz</p> $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \quad (1)$ <p>(Học sinh có thể nêu không cần chứng minh bất đẳng thức (1)) Áp dụng bất đẳng thức (1), ta có</p> $P^2 = (a(2 - bc) + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(b + c))^2 \leq (a^2 + 2)((2 - bc)^2 + 2(b + c)^2)$ $= (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2).$	0,5
		<p>Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có</p> $(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) = \frac{1}{6} 3(a^2 + 2) \cdot 2(b^2 + 2) \cdot (c^2 + 2)$ $\leq \frac{1}{6} \left(\frac{3(a^2 + 2) + 2(b^2 + 2) + (c^2 + 2)}{3} \right)^3 = 36$	0,75
		Từ đó suy ra $P^2 \leq 36$. Suy ra $-6 \leq P \leq 6$.	0,25
		<p>Mặt khác với $a = 0; b = 1; c = 2$ thì $3a^2 + 2b^2 + c^2 = 6$ và $P = 6$; $a = 0; b = -1; c = -2$ thì $3a^2 + 2b^2 + c^2 = 6$ và $P = -6$.</p> <p>Vậy $P_{\max} = 6, P_{\min} = -6$.</p>	0,5

-----HẾT-----