

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**TỈNH ĐỒNG THÁP****ĐỀ THI CHÍNH THỨC***Đề thi gồm có 01 trang***KỶ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI****DỰ THI CẤP QUỐC GIA NĂM 2021**Môn thi: **TOÁN**Ngày thi: **28/07/2020***Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)***Câu 1. (4,0 điểm)**

Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, xét số thực $u_n > 1$ sao cho phương trình $[u_n x] = x$ có đúng n nghiệm nguyên (theo ẩn x và $[u_n x]$ là phần nguyên của $u_n x$).

1. Chứng minh rằng $[u_n] = 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

2. Với mỗi cách xác định của dãy (u_n) thỏa điều kiện trên. Chứng minh rằng dãy (u_n) luôn có giới hạn và tìm giới hạn ấy.

Câu 2. (5,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) = 5 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = x + 6 \end{cases}$$

2. Xét số $T = 3^n - 2^n$, trong đó n là số nguyên dương, $n \geq 2$. Chứng minh rằng:

a) Không tồn tại n để T là bình phương của một số nguyên tố.

b) Nếu T là lập phương của một số nguyên tố thì n là một số nguyên tố.

Câu 3. (3,0 điểm)

Với mỗi $m \in \mathbb{N}^*$ ta kí hiệu $\alpha(2m) = (m!)^2$, $\alpha(2m+1) = (m!).((m+1)!)$. Cho đa thức $p(x)$ hệ số nguyên, có bậc lớn hơn hoặc bằng k ($k \in \mathbb{N}^*$) và có ít nhất k nghiệm nguyên phân biệt. Xét số nguyên n ($n \neq 0$) sao cho đa thức $q(x) = p(x) - n$ có ít nhất một nghiệm nguyên. Chứng minh rằng $|n| \geq \alpha(k)$.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC , đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F .

1. Gọi S là giao điểm của EF với BC . Chứng minh SI vuông góc với AD .

2. Đường thẳng d thay đổi, đi qua S và cắt đường tròn (I) tại hai điểm phân biệt M, N . Các tiếp tuyến tại M, N của (I) cắt nhau tại T . Chứng minh T thuộc một đường thẳng cố định.

3. Gọi K là giao điểm của ME và NF , G là giao điểm của MC và NB . Chứng minh K và G cùng thuộc đường thẳng AD .

Câu 5. (2,0 điểm)

Viết n số thực có tổng bằng $n-1$ ($n \geq 1$) quanh một đường tròn. Chứng minh rằng ta có thể gán nhãn cho các số đó theo chiều kim đồng hồ là x_1, x_2, \dots, x_n sao cho: $x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k-1, \forall 1 \leq k \leq n$.

----- **HẾT** -----

+ Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

+ Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

+ Chữ ký giám thị 1: + Chữ ký giám thị 2: