

# Số hạng tổng quát

Đội ngũ hdmvietnam.org giới thiệu đến các em học sinh lớp 11 bài viết Số hạng tổng quát, nhằm giúp các em học tốt chương trình Toán 11.

## Dạng 3. Số hạng tổng quát

Dựa vào định lý về số hạng tổng quát

### ❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 3 ❖❖❖

**Ví dụ 1.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$ , biết  $u_1 = -3, d = 7$ . Tìm  $u_{15}, u_{20}, u_{25}, u_{30}$ .

**Lời giải.**

Theo công thức ta có:

$$u_{15} = u_1 + (15 - 1)d = -3 + 14.7 = 95.$$

Tương tự ta có:

$$u_{20} = u_1 + (20 - 1)d = -3 + 19.7 = 130.$$

$$u_{25} = u_1 + (25 - 1)d = -3 + 24.7 = 165.$$

$$u_{30} = u_1 + (30 - 1)d = -3 + 29.7 = 200.$$

□

**Ví dụ 2.** Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng  $(u_n)$ , biết:

$$\begin{cases} u_7 = 8 \\ d = 2 \end{cases} \quad (3.5)$$

**Lời giải.**

$$(3.5) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 8 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Vậy công thức tổng quát của cấp số cộng:

$$u_n = -4 + (n - 1)2 \Leftrightarrow u_n = 2n - 6 \text{ với } n \geq 2.$$

□

**Ví dụ 3.** Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng  $(u_n)$ , biết:

$$\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases} \quad (3.6)$$

**Lời giải.**

$$(3.6) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4d - (u_1 + 2d) = 10 \\ u_1 + u_1 + 5d = 17 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3 \end{cases}.$$

□

**Ví dụ 4.** Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số nữa để được một cấp số cộng.

**Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_8 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ u_1 + 7d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ d = 4 \end{cases}.$$

Vậy 6 số đặt thêm giữa các số 7 và 35 để được một cấp số cộng là: 11, 15, 19, 23, 27, 31.

□

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$ , biết:

$$\begin{cases} u_1 = -15 \\ d = 18 \end{cases}.$$

a. Tìm  $u_5, u_{10}, u_{15}, u_{20}, u_{25}$ .

b. Số 1209 là số hạng thứ bao nhiêu ?

**Lời giải.**

a. Áp dụng định lý ta có:

$$u_5 = u_1 + 4d = -15 + 4.18 = 57.$$

$$u_{10} = u_1 + 9d = -15 + 9.18 = 147.$$

$$u_{15} = u_1 + 14d = -15 + 14.18 = 237.$$

$$u_{20} = u_1 + 19d = -15 + 19.18 = 327.$$

$$u_{25} = u_1 + 24d = -15 + 24.18 = 417.$$

b. Gọi  $u_k$  là số hạng của số 1209. Ta có:

$$u_k = 1209 = u_1 + (k - 1)d \Leftrightarrow k = 69.$$

Vậy 1209 là số hạng thứ 69.

□

**Bài 2.** Xác định công thức tổng quát của cấp số cộng  $(u_n)$ , biết:

$$\begin{cases} u_{11} = 5 \\ d = -6 \end{cases} \quad (3.7)$$

**Lời giải.**

$$(3.7) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 10d = 5 \\ d = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 65 \\ d = -6 \end{cases}.$$

Vậy công thức tổng quát của cấp số cộng:

$$u_n = 65 + (n - 1).(-6) \Leftrightarrow u_n = -6n + 71 \text{ với } n \geq 2.$$

□

**Bài 3.** Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng  $(u_n)$ , biết:

$$\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \quad (3.8)$$

**Lời giải.**

$$(3.8) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 4d - (u_1 + 2d) = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}.$$

□

**Bài 4.** Giữa các số 10 và 64 hãy đặt thêm 17 số nữa để được một cấp số cộng.

**Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{19} = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 10 \\ u_1 + 18d = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 10 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Vậy 17 số đặt thêm giữa các số 10 và 64 để được một cấp số cộng là:

$$13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61.$$

□

**Bài 5.** Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng bằng 2 và tổng các bình phương của ba số đó bằng  $\frac{14}{9}$ . Xác định ba số đó và tính công sai của cấp số cộng.

**Lời giải.**

Ta có hệ:

$$\begin{cases} u_k + u_{k+1} + u_{k+2} = 2 \\ u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u_k + u_k + d + u_k + 2d = 2 \\ u_k^2 + (u_k + d)^2 + (u_k + 2d)^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_k + 3d = 2 \\ 3u_k^2 + 6u_kd + 5d^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u_k = 1 \\ d = -\frac{1}{3} \\ u_k = \frac{1}{3} \\ d = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa yêu cầu bài toán:

$$1; \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \text{ ứng với } d = -\frac{1}{3} \text{ hoặc } \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1 \text{ ứng với } d = \frac{1}{3}.$$

□

### BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Bài 6.** Cho một cấp số cộng  $(u_n)$  thỏa  $\frac{S_n}{S_m} = \frac{n^2}{m^2} \forall m, n \in \mathbb{N}^*$ . Tính tỉ số  $\frac{u_{1994}}{u_{2017}}$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$\frac{S_n}{S_m} = \frac{n^2}{m^2} \\ \Leftrightarrow \frac{n(u_1 + u_n)}{m(u_1 + u_m)} = \frac{n^2}{m^2} \\ \Leftrightarrow m(u_1 + u_n) = n(u_1 + u_m) \\ \Leftrightarrow d = 2u_1.$$

Suy ra:

$$\frac{u_{1994}}{u_{2017}} = \frac{u_1 + 1993d}{u_1 + 2016d} = \frac{u_1 + 3986u_1}{u_1 + 4032u_1} = \frac{3987}{4033}.$$

□

**Bài 7.** Cho các số  $a, b, a + b \neq 0$  thỏa mãn  $\frac{1}{a}; \frac{1}{a+b}; \frac{1}{b}$  theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tính tỉ số  $\frac{a^2}{b^2}$ .

**Lời giải.**

Áp dụng tính chất các số hạng của cấp số cộng, ta có:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b} \\ \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{2}{a+b} \\ \Leftrightarrow (a+b)^2 = 2ab \\ \Leftrightarrow a^2 = -b^2 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = -1.$$

□