SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**
HẢI DƯƠNG	**LỚP 12 THPT CẤP TỈNH NĂM HỌC 2022 - 2023**
	Môn thi: **TOÁN**
ĐỀ CHÍNH THỨC	Ngày thi: **19/10/2022**
	*Thời gian làm bài: **180 phút** (không tính thời gian phát đề)*
	*Đề thi gồm **05** câu & **01** trang*

Câu I. *(2,0 điểm)*

1) Cho hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d) có phương trình $y=-2x+m$ với m là tham số. Tìm m để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm A và B phân biệt sao cho $AB=\sqrt{5}$.

2) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có đồ thị (C_m) với m là tham số. Tìm m để đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của tam giác vuông cân.

Câu II. *(2,0 điểm)*

1) Một nhóm 15 học sinh gồm 6 học sinh lớp A, 5 học sinh lớp B, 4 học sinh lớp C. Lấy ngẫu nhiên 7 học sinh trong nhóm trên. Tính xác suất để 7 học sinh lấy ra có đủ cả 3 lớp và số học sinh lớp B bằng số học sinh lớp C.

2) Giải phương trình: $\dfrac{x^3+3x^2-4x+1}{x^2+3}=\sqrt{x^2-x+1}$.

Câu III. *(2,0 điểm)*

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3+6y^2+7y+3+(3-2x)\sqrt{x-2}=0 \\ y+\sqrt{2y^2+4y+3}=3+\sqrt{7-x} \end{cases}$.

2) Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A* có trọng tâm *G*; gọi *E*, *H* lần lượt là trung điểm của *AB*, *BC*. *D* là điểm đối xứng với *H* qua *A*, *I* là giao điểm của đường thẳng *AB* và đường thẳng *CD*. Biết $D(-1;-1)$, đường thẳng *IG* có phương trình $6x-3y-7=0$ và điểm *E* có hoành độ bằng 1. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC*.

Câu IV. *(3,0 điểm)*

1) Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có cạnh đáy bằng *a*, góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°.

a) Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* theo *a*.

b) Gọi *G* là trọng tâm của tam giác *SAC*, *M* là điểm thuộc cạnh *SB* sao cho $SM=\dfrac{1}{4}SB$. Tính góc giữa hai đường thẳng *GM* và *BC*.

2) Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a. Đường thẳng *d* đi qua D_1 và tâm *O* của hình vuông BCC_1B_1. Đoạn thẳng *MN* có trung điểm *K* thuộc đường thẳng *d*, biết *M* thuộc mặt phẳng (BCC_1B_1), *N* thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng *MN*.

Câu V. *(1,0 điểm)*

Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{4c^3}{3(c+a)^3}$.

--------------- HẾT ---------------

Giám thị coi thi không giải thích gì thêm./.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. ***(2 điểm)***

1) Cho hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d) có phương trình $y=-2x+m$ với m là tham số. Tìm m để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm A và B phân biệt sao cho $AB=\sqrt{5}$.

Lời giải

Điều kiện $x\neq 1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x+2}{x-1}=-2x+m \Leftrightarrow 2x^2-mx+m+2=0\,(x\neq 1)\,(1)$.

Để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm A và B phân biệt thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-8m-16>0 \\ 2.1-m+m+2=4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>4+4\sqrt{2} \\ m<4-4\sqrt{2} \end{array}\right. (2)$.

Với điều kiện (2) thì (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm $A(x_A;-2x_A+m)$ và $B(x_B;-2x_B+m)$ phân biệt thỏa mãn $\begin{cases} x_A+x_B=\dfrac{m}{2} \\ x_A.x_B=\dfrac{m+2}{2} \end{cases}$.

Vì độ dài $AB=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5(x_B-x_A)^2}=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x_A+x_B)^2-2x_A.x_B=1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2}{4}-(m+2)=1$

$\Leftrightarrow m^2-4m-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=6 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện (2) ta thấy $m=-2$ thỏa mãn.

2) Cho hàm số $f(x)=x^4-2mx^2+m-1$ có đồ thị (C_m) với m là tham số. Tìm m để đồ thị (C_m) có 3 cực trị là 3 đỉnh của tam giác vuông cân.

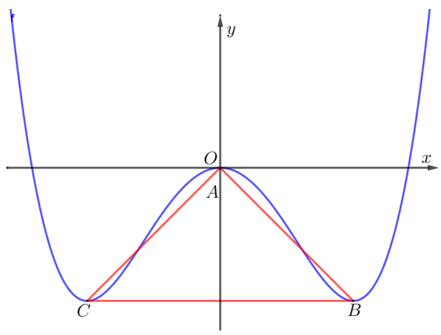
Lời giải

Ta có: $y'=4x^3-4mx$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m} \end{array}\right.$

Để đồ thị (C_m) có 3 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$.

Với $m>0$ thì đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị lần lượt là $A(0;m-1)$; $B(-\sqrt{m};-m^2+m-1)$; $C(\sqrt{m};-m^2+m-1)$.



Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{m};-m^2\right);\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{m};-m^2\right)$

Để tam giác ABC vuông cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-m^2+m^4=0\\ m^2+m^4=m^2+m^4\end{cases} \Leftrightarrow m=1$

Kết luận: $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. ***(2.0 điểm)***

1) Một nhóm 15 học sinh gồm 6 học sinh lớp A, 5 học sinh lớp B, 4 học sinh lớp C. Lấy ngẫu nhiên 7 học sinh trong nhóm trên. Tính xác suất để 7 học sinh lấy ra có đủ cả 3 lớp và số học sinh lớp B bằng số học sinh lớp C.

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{15}^7=6435$

Gọi A là biến cố : “ 7 học sinh lấy ra có đủ cả 3 lớp và số học sinh lớp B bằng số học sinh lớp C” .

TH1: 3 học sinh lớp B, 3 học sinh lớp C, 1 học sinh lớp A: $C_5^3.C_4^3.C_6^1=240$ (cách chọn)

TH2: 2 học sinh lớp B, 2 học sinh lớp C, 3 học sinh lớp A: $C_5^2.C_4^2.C_6^3=1200$ (cách chọn)

TH3: 1 học sinh lớp B, 1 học sinh lớp C, 5 học sinh lớp A: $C_5^1.C_4^1.C_6^5=120$ (cách chọn)

$n(A)=240+1200+120=1560$

Xác suất của biến cố A là: $P(A)=\dfrac{1560}{6435}=\dfrac{8}{33}$.

2) Giải phương trình $\dfrac{x^3+3x^2-4x+1}{x^2+3}=\sqrt{x^2-x+1}$.

Lời giải

Điều kiện $x^2-x+1\ge 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Ta có

$$\frac{x^3+3x^2-4x+1}{x^2+3}=\sqrt{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow x+3-\frac{7x+8}{x^2+3}=\sqrt{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow x+3-\sqrt{x^2-x+1}=\frac{7x+8}{x^2+3} \quad (1)$$

Xét phương trình

$x+3+\sqrt{x^2-x+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=-x-3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-x-3\ge 0\\ x^2-x+1=x^2+6x+9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le -3\\ 7x=-8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le -3\\ x=-\dfrac{8}{7}\end{cases} \text{(l)}$$

Do đó $x+3+\sqrt{x^2-x+1}\ne 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(x+3)^2-(x^2-x+1)}{x+3+\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{7x+8}{x^2+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x+8}{x+3+\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{7x+8}{x^2+3}$$

$$\Leftrightarrow (7x+8)\left(\frac{1}{x+3+\sqrt{x^2-x+1}}-\frac{1}{x^2+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}7x+8=0\\ x+3+\sqrt{x^2-x+1}=x^2+3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{8}{7}\\ \sqrt{x^2-x+1}=x^2-x. \qquad (*)\end{array}\right.$$

Đặt $u=x^2-x$. Ta có $(*) \Rightarrow \sqrt{u+1}=u \;\Leftrightarrow \begin{cases}u\ge 0\\ u+1=u^2\end{cases} \Leftrightarrow u=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $x^2-x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{-\frac{8}{7};\frac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}\right\}$.

Câu 3. ***(2.0 điểm)***

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2y^3+6y^2+7y+3+(3-2x)\sqrt{x-2}=0 & (1)\\ y+\sqrt{2y^2+4y+3}=3+\sqrt{7-x} & (2)\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $2\le x\le 7$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow 2\left(y^3+3y^2+3y+1\right)+y+1=(2x-3)\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow 2(y+1)^3+y+1=2(x-2)\sqrt{x-2}+\sqrt{x-2} \Leftrightarrow 2(y+1)^3+y+1=2\left(\sqrt{x-2}\right)^3+\sqrt{x-2}$ (3).

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=6t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $(3) \Leftrightarrow f(y+1)=f\left(\sqrt{x-2}\right) \Leftrightarrow y+1=\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y^2+2y+3 \; (*)\\ y\ge -1\end{cases}$.

Thay (*) vào (2), ta được

$$y+\sqrt{2y^2+4y+3}=3+\sqrt{7-x} \Leftrightarrow y-1+\sqrt{2y^2+4y+3}-3=\sqrt{4-y^2-2y}-1$$

$$\Leftrightarrow y-1+\frac{2y^2+4y-6}{\sqrt{2y^2+4y+3}+3}=\frac{3-y^2-2y}{\sqrt{4-y^2-2y}+1}$$

$$\Leftrightarrow y-1+\frac{(y-1)(2y+6)}{\sqrt{2y^2+4y+3}+3}=-\frac{(y-1)(y+3)}{\sqrt{4-y^2-2y}+1}$$

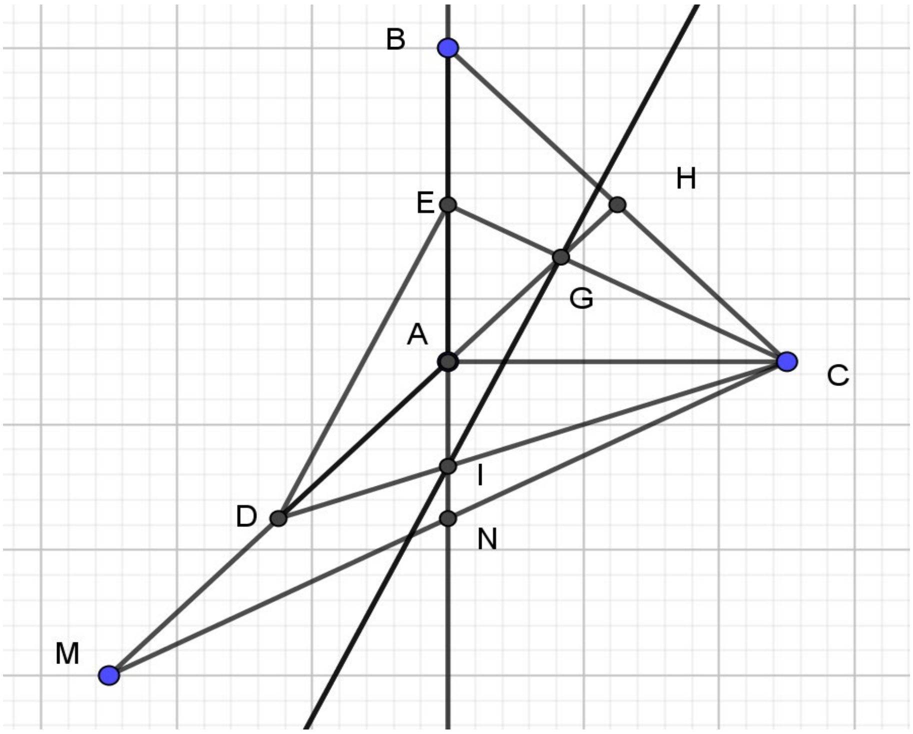
$$\Leftrightarrow (y-1)\left(1+\frac{2y+6}{\sqrt{2y^2+4y+3}+3}+\frac{y+3}{\sqrt{4-y^2-2y}+1}\right)=0 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=6.$$

Vì với $y \geq -1$ ta có $1+\dfrac{2y+6}{\sqrt{2y^2+4y+3}+3}+\dfrac{y+3}{\sqrt{4-y^2-2y+1}}>0$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(6;1)$.

2) Cho tam giác ABC vuông cân tại A có trọng tâm G; gọi E,H lần lượt là trung điểm của AB, BC. D là điểm đối xứng với H qua A, I là giao điểm của đường thẳng AB và đường thẳng CD. Biết $D(-1;-1)$, đường thẳng IG có phương trình $6x-3y-7=0$ và điểm E có hoành độ bằng 1. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải



Gọi N là điểm đối xứng với E qua A, M là điểm đối xứng của A qua D.Khi đó I là trọng tâm của tam giác ACM.

Ta có $\dfrac{CG}{CE}=\dfrac{CI}{CD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow IG//DE$. IG có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2)$.

Giả sử $E(1;y_0)\Rightarrow \overrightarrow{DE}=(2;y_0+1)$. Mà $IG//DE\Rightarrow \dfrac{y_0+1}{2}=\dfrac{2}{1}\Rightarrow y_0=3\Rightarrow E(1;3)$.

Giả sử tọa $A(a_1;b_1)\Rightarrow \begin{cases} B(2-a_1;6-b_1) \\ H(2a_1+1;2b_1+1)\end{cases}\Rightarrow C(5a_1;5b_1-4)\Rightarrow G\left(\dfrac{5a_1+2}{3};\dfrac{5b_1+2}{3}\right)$.

Do $G\in GI\Rightarrow 2a_1-b_1-1=0\Rightarrow b_1=2a_1-1(1)$.Ta có $\overrightarrow{AE}=(1-a_1;3-b_1),\overrightarrow{AC}=(4a_1;4b_1-4)$.

Do tam giác ABC vuông tại A nên ta có

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow 4a_1(1-a_1)+(4b_1-4)(3-b_1)=0\Leftrightarrow a_1(1-a_1)+(b_1-1)(3-b_1)=0(2)$.

Từ (1) và (2) ta được $a_1(1-a_1)+(2a_1-2)(4-2a_1)=0\Leftrightarrow (a_1-1)(8-5a_1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=1 \\ a_1=\dfrac{8}{5}\end{array}\right.$.

Với $a_1=1\Rightarrow b_1=1\Rightarrow A(1;1),B(1;5),C(5;1)$.

Với $a_1=\dfrac{8}{5}\Rightarrow b_1=\dfrac{11}{5}\Rightarrow A\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{11}{5}\right),B\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{19}{5}\right),C(8;7)$.

Câu 4. ***(3.0 điểm)***

1) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°.

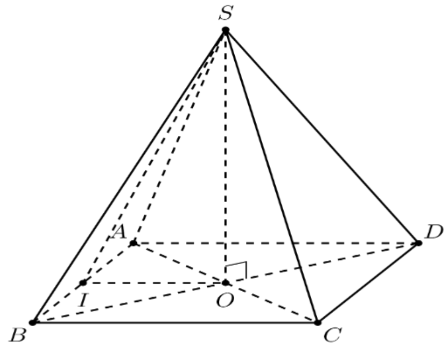
a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC, M là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SM = \frac{1}{4}SB$.

Tính góc giữa hai đường thẳng GM và BC.

Lời giải

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, theo giả thiết ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AB$. (1)

Gọi I là trung điểm của AB. Suy ra $OI = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$ và $OI \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $AB \perp (SIO) \Rightarrow \big((SAB),(ABCD)\big) = \widehat{SIO}$.

Từ giả thiết ta có $\widehat{SIO} = 60^\circ$, do đó $SO = IO \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

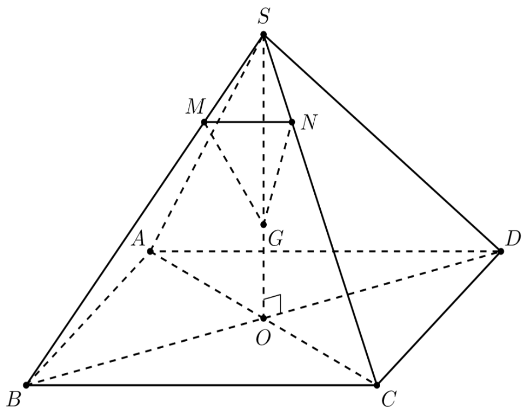
b) Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC, M là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SM = \frac{1}{4}SB$.

Tính góc giữa hai đường thẳng GM và BC.

Qua M vẽ đường thẳng song song với BC, cắt SC tại N, khi đó ta có $SN = \frac{1}{4}SC$.

Ta có

$SB = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SM = \frac{1}{4}SB = \frac{a\sqrt{5}}{8}$ và $SG = \frac{2}{3}SO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, do đó $\cos\widehat{GSM} = \frac{SO}{SB} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.



Áp dụng định lý côsin trong tam giác GMN ta có

$$MG^2 = SM^2 + SG^2 - 2SM \cdot SG \cos\widehat{GSM} = \frac{5a^2}{64} + \frac{a^2}{3} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{8} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{31a^2}{192} \Rightarrow MG = \frac{a\sqrt{93}}{24}.$$

Xét tam giác GMN có $MN = \frac{1}{4}BC = \frac{a}{4}$, $GM = GN = \frac{a\sqrt{93}}{24}$.

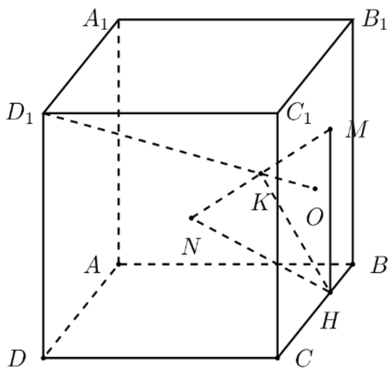
Áp dụng định lý côsin ta có

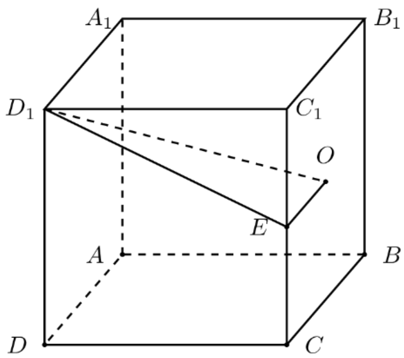
$$\cos\widehat{GMN} = \frac{MG^2 + MN^2 - GN^2}{2MG \cdot MN} = \frac{MN}{2MG} = \frac{\sqrt{93}}{31} > 0$$

Vì $MN \parallel BC$ và góc $\widehat{GMN}$ nhọn nên $\cos(GM, BC) = \cos(GM, MN) = \cos\widehat{GMN} = \frac{\sqrt{93}}{31}$.

2) Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a. Đường thẳng d đi qua D_1 và tâm O của hình vuông BCC_1B_1. Đoạn thẳng MN có trung điểm K thuộc đường thẳng d, biết M thuộc mặt phẳng (BCC_1B_1), N thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN.

Lời giải





Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên BC.

Vì hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (BCC_1B_1) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến BC nên ta có $MH \perp (ABCD) \Rightarrow MH \perp HN$.

Tam giác MHN vuông tại H, K là trung điểm cạnh huyền MN nên ta có $MN = 2KH$.

Do đó MN nhỏ nhất khi và chỉ khi KH nhỏ nhất, tức là khi KH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng d và BC.

Gọi E là trung điểm CC_1, khi đó $BC \parallel OE$ cho nên

$$\mathrm{d}(D_1O, BC) = \mathrm{d}(BC, (D_1OE)) = \mathrm{d}(C, (D_1OE)).$$

Vì $OE \parallel BC$ và $BC \perp (CDD_1C_1)$ nên $(CDD_1C_1) \perp (D_1OE)$, do đó

$$d\left(C,(D_1OE)\right) = d\left(C, D_1E\right) = d\left(C_1, D_1E\right) = \frac{C_1D_1 \cdot C_1E}{\sqrt{C_1D_1^2 + C_1E^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Khi KH là đoạn vuông góc chung của D_1O và BC, khi đó với $M \in (BCC_1B_1)$ thoả mãn $MH \perp BC$ và $KH = KM$, ta lấy N sao cho K là trung điểm MN. Suy ra tam giác MHN vuông tại N.

Vì $MH \perp (ABCD)$ và $MH \perp HN$ nên $N \in (ABCD)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Câu 5. ***(1.0 điểm)***

Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{4c^3}{3(c+a)^3}.$$

Lời giải

- Ta có $P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{4c^3}{3(c+a)^3} = \frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2} + \frac{4}{3\left(1+\frac{a}{c}\right)^3}$.
- Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}; x, y, z > 0; xyz = 1$.
- Khi đó $P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{b^2}{(1+y)^2} + \frac{4}{3(1+z)^3}$.
- Ta đi chứng minh bất đẳng thức phụ: $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$.

  Thật vậy:

  Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 số ta có: $(ax+by)^2 \leq \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$.

  Từ đó $(1+x)^2 = \left(1.1 + \sqrt{xy}.\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 \leq (1+xy)\left(1+\frac{x}{y}\right) = (1+xy)\left(\frac{x+y}{y}\right)$.

  Hay $\frac{1}{(1+x)^2} \geq \frac{y}{(1+xy)(x+y)}$. Tương tự $\frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{x}{(1+xy)(x+y)}$.

  Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta được: $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$

  Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$.
- Áp dụng bất đẳng thức trên ta có:

$$P \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{4}{3(1+z)^3} = \frac{z}{1+z} + \frac{4}{3(1+z)^3} = \frac{3z(1+z)^2 + 4}{3(1+z)^3}.$$

- Ta đi chứng minh $P \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3z(1+z)^2+4}{3(1+z)^3} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow (z-1)^2(z+2) \geq 0$ luôn đúng.

---------- ----------