SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT NĂM 2022
TỈNH QUẢNG NINH	Môn thi: **TOÁN** - Bảng: **B**
	Ngày thi: **02/12/2022**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	*Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. *(4,5 điểm)*

Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3\left(m^2-1\right)x+m^3-m$ có đồ thị (C) và điểm $I(-1;3)$.

a) Tìm các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2022;+\infty)$.

b) Tìm các giá trị của tham số m sao cho (C) có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị của (C) cùng với điểm I tạo thành một tam giác vuông tại I.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Cho tam giác đều *ABC*. Trên mỗi cạnh *AB, BC, CA* lần lượt lấy 4 điểm phân biệt và không điểm nào trùng với các đỉnh *A, B, C*. Hỏi lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập hợp 15 điểm đã cho (tính cả các điểm *A, B, C*)?

b) Một người chọn ngẫu nhiên một số điện thoại, trong đó mỗi số có mười chữ số và ba chữ số đầu cố định là 099. Số điện thoại này được gọi là *may mắn* nếu bốn chữ số tiếp theo là các chữ số chẵn đôi một khác nhau, ba chữ số cuối là các số lẻ và tổng ba chữ số này bằng 9. Tính xác suất để người đó nhận được số điện thoại *may mắn*.

Câu 3. *(5,5 điểm)*

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $AB=3$, $BC=6$, đường thẳng *SA* vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Điểm *M* thuộc đoạn *BC* sao cho $BM=\frac{1}{3}BC$. Góc giữa đường thẳng *SC* và mặt phẳng (SAB) bằng 45°.

a) Tính thể tích khối chóp *S.ABCD*.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *SM* và *AC*.

c) Gọi *H* và *K* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A* trên *SM* và *SC*. Chứng minh hình chóp *A.CMHK* nội tiếp một mặt cầu. Tính bán kính mặt cầu đó.

Câu 4. *(1,5 điểm)*

Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có góc $\widehat{SAC}=\alpha>45°$. Mặt phẳng (P) qua *A* và vuông góc với đường thẳng *SC* cắt hình chóp theo một thiết diện. Tính tỉ số diện tích của thiết diện và diện tích đáy *ABCD* theo α.

Câu 5. *(3,0 điểm)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{\ \ ^2-x}\right)+\ \ =y^2-\ \ x \\ \sqrt{\ \ ^2\ \ }\ \ \ \sqrt{\ \ x-3}\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Câu 6. *(1,5 điểm)*

Cho các số thực *a, b, c* thỏa mãn $\frac{1}{3} < a,\ b,\ c < 1$. Chứng minh:

$$\log_a\left(\frac{3}{4}b - \frac{1}{4}\right) + \log_b\left(\frac{3}{4}c - \frac{1}{4}\right) + \log_c\left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\right) \ge 9.$$

--------------- HẾT ---------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm./.

Họ và tên thí sinh: . . . .

Số báo danh: . . . .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: (4.5 điểm)

Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3\left(m^2-1\right)x+m^3-m$ có đồ thị (C) và điểm $I(-1;3)$

a) Tìm các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2022;+\infty)$.

b) Tìm các giá trị của tham số m sao cho (C) có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị của (C) cùng với điểm I tạo thành một tam giác vuông tại I.

Lời giải

a) Tập xác định $D=\mathbb{R}$

$y'=-3x^2+6mx-3\left(m^2-1\right)$

$y'=0\Leftrightarrow -3x^2+6mx-3\left(m^2-1\right)=0\Leftrightarrow -x^2+2mx-\left(m^2-1\right)=0\ (*)$

Ta có $\Delta'=b'^2-ac=m^2-m^2+1=1>0\ \ \forall m\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow pt(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow (C)$ luôn có hai điểm cực trị.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=m+1\\x_2=m-1\end{array}\right.$$

Dễ thấy $x_1>x_2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên $(2022;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$m+1\le 2022\Leftrightarrow m\le 2021$$

Vậy $m\le 2021$ thỏa yêu cầu.

b) Hai điểm cực trị của (C) là $A(m+1;2m+2),B(m-1;2m-2)$.

$\overrightarrow{IA}(m+2;2m-1),\overrightarrow{IB}(m;2m-5)$

Theo giả thiết tam giác ABI vuông tại I

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0\Leftrightarrow m(m+2)+(2m-1)(2m-5)=0\Leftrightarrow 5m^2-10m+5=0\Leftrightarrow m=1$

Vậy $m=1$.

Câu 2: (4.0 điểm)

a) Cho tam giác đều ABC. Trên mỗi cạnh AB,BC,CA lần lượt lấy 4 điểm phân biệt và không điểm nào trùng với các đỉnh A,B,C. Hỏi lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập hợp 15 điểm đã cho (tính cả các điểm A,B,C).

Lời giải

Số cách lấy 3 điểm tùy ý từ tập hợp 15 điểm là C_{15}^3.

Số cách lấy 3 điểm thuộc cùng một cạnh của tam giác là $3C_6^3$.

Vậy số tam giác có các đỉnh thuộc tập hợp 15 điểm đã cho là $C_{15}^3 - 3C_6^3 = 395$.

b) Một người chọn ngẫu nhiên một số điện thoại, trong đó mỗi số có mười chữ số và ba chữ số đầu cố định là 099. Số điện thoại này được gọi là *may mắn* nếu bốn chữ số tiếp theo là các chữ số chẵn đôi một khác nhau, ba chữ số cuối là các số lẻ và tổng ba chữ số này bằng 9. Tính xác suất để người đó nhận được số điện thoại *may mắn*.

Lời giải

Giả sử số điện thoại là: $099a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$ (trong đó $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7 \in \{0;1;..;9\}$)

Ta có: $n(\Omega) = 10^7$

Gọi A = "Số điện thoại may mắn"

Khi đó: Có A_5^4 cách chọn a_1,a_2,a_3,a_4

TH1: a_5,a_6,a_7 là bộ số $(1;3;5) \Rightarrow 3!$ cánh chọn

TH2: a_5,a_6,a_7 là bộ số $(1;1;7) \Rightarrow 3$ cánh chọn

TH3: a_5,a_6,a_7 là bộ số $(3;3;3) \Rightarrow 1$ cánh chọn

$\Rightarrow n(A) = A_5^4(3!+3+1) = 1200$

Xác suất để người đó nhận được số điện thoại may mẵn là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1200}{10^7} = 0,00012$.

Câu 3: (5.5 điểm)

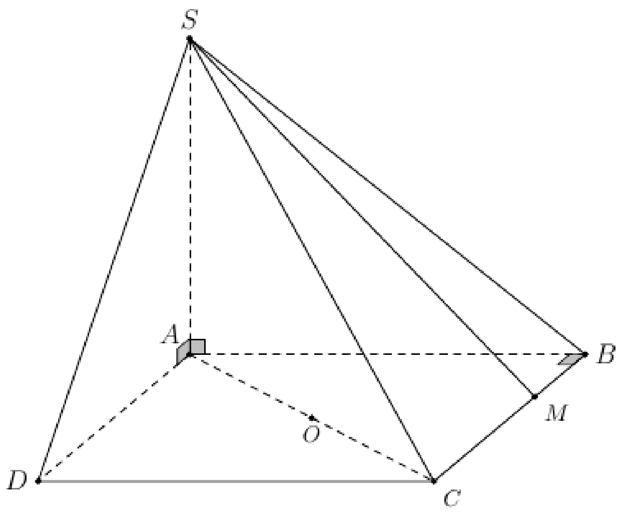
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3$, $BC = 6$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $BM = \dfrac{1}{3}BC$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng $45°$.

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC.

c) Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SM và SC. Chứng minh hình chóp $A.CMHK$ nội tiếp một mặt cầu. Tính bán kính mặt cầu đó.

Lời giải



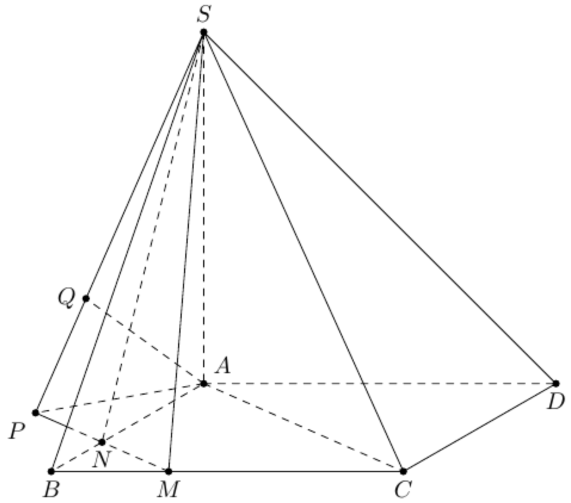
a) Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Ta có $(SC,(SAB)) = (SC,SB) = \widehat{CSB} = 45°$.

Suy ra ΔSBC vuông cân tại B. Khi đó $SB = BC = 6$ và $SC = 6\sqrt{2}$.

Trong ΔSAB vuông tại A, ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.3\sqrt{3}.3.6 = 18\sqrt{3}$ (đvtt).

b) **Cách 1:**



Trong $(ABCD)$ kẻ $MN // AC$ với $N \in AB$. Suy ra $BN = \frac{1}{3}AB = 1$; $AN = 2$; $BM = \frac{1}{3}BC = 2$;

$MN = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{3}\sqrt{9+36} = \sqrt{5}$; $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

Khi đó $AC // (SMN) \Rightarrow \mathrm{d}(AC, SM) = \mathrm{d}(AC, (SMN)) = \mathrm{d}(A, (SMN))$.

Trong $(ABCD)$ kẻ $AP \perp MN$ với $P \in MN$.

Trong (SAP) kẻ $AQ \perp SP$ (1) với $Q \in SP$.

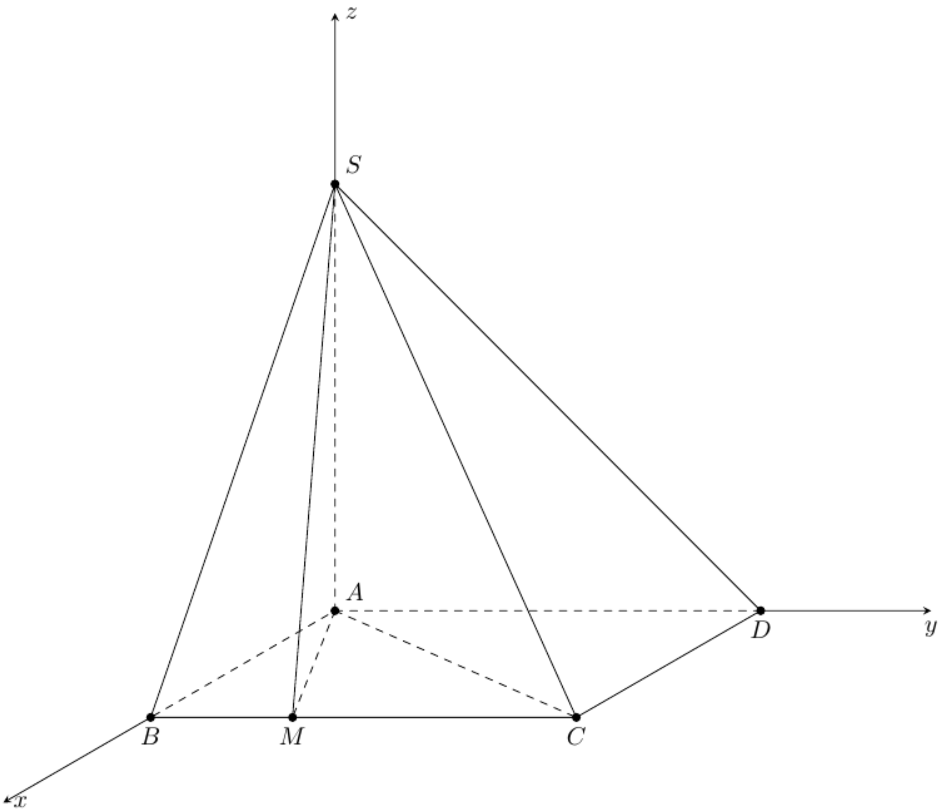
Do $\begin{cases} MN \perp AP \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAP) \Rightarrow AQ \perp MN$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AQ \perp (SMN)$. Vậy $\mathrm{d}(AC, SM) == \mathrm{d}(A, (SMN)) = AQ$.

Ta có $AP = \mathrm{d}(A, MN) = \frac{2}{3}\mathrm{d}(B, AC) = \frac{2}{3}.\frac{AB.BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{2}{3}.\frac{3.6}{\sqrt{9+36}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Trong ΔSAP vuông tại A ta có $AQ = \frac{SA.AP}{\sqrt{SA^2 + AP^2}} = \frac{3\sqrt{3}.\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{27 + \frac{16}{5}}} = \frac{12\sqrt{453}}{151}$.

Cách 2:



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với

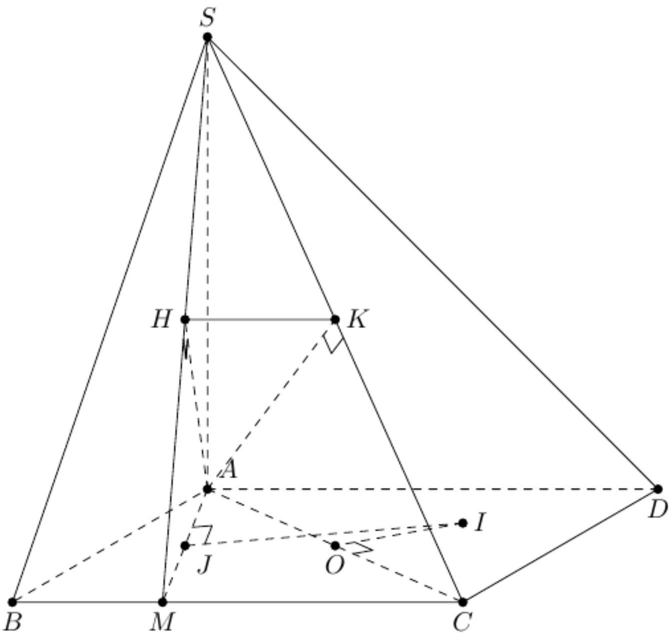
$A \equiv O(0;0;0)$; $B(3;0;0)$; $D(0;6;0)$; $C(3;6;0)$; $S(0;0;3\sqrt{3})$; $M(3;2;0)$.

Ta có $\overrightarrow{SM} = (3;2;-3\sqrt{3})$ và $\overrightarrow{AC} = (3;6;0)$, $\overrightarrow{AM} = (3;2;0)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SM}\right] = (-18\sqrt{3}; 9\sqrt{3}; -12) \Rightarrow \begin{cases} \left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SM}\right]\right| = 3\sqrt{151} \\ \overrightarrow{AM}.\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SM}\right] = -36\sqrt{3} \end{cases}$.

Ta có $\mathrm{d}(AC, SM) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AM}.\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SM}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SM}\right]\right|} = \dfrac{36\sqrt{3}}{3\sqrt{151}} = \dfrac{12\sqrt{3}}{\sqrt{151}} = \dfrac{12\sqrt{453}}{151}$.

c)



Gọi O, J lần lượt là trung điểm của AC, AM.

Dựng trục của các ΔAHM và ΔAKC. Hai trục này là trung trực của các đoạn thẳng AC, AM nên giao điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔACM.
Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.CMHK$ chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔACM.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.BC = \frac{1}{2}.3.6 = 9$ (đvdt).

$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}.AB.BM = \frac{1}{2}.3.2 = 3$ (đvdt).

Suy ra $S_{\Delta AMC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ABM} = 9 - 3 = 6$ (đvdt).

Mặt khác

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$; $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$; $MC = \frac{2}{3}BC = 4$.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔACM.

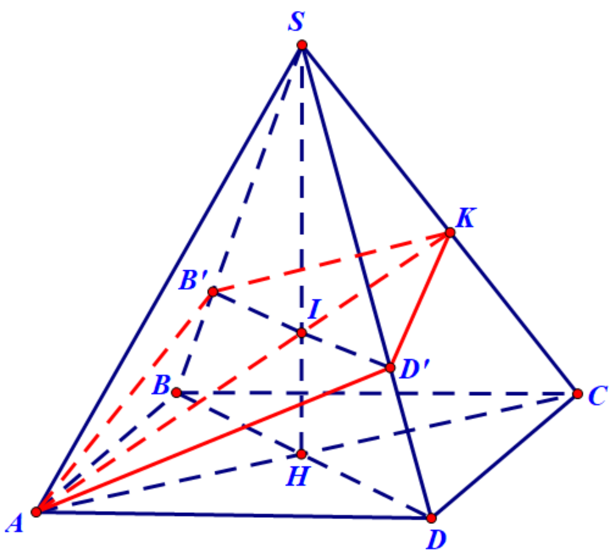
Ta có $S_{\Delta AMC} = \frac{AM.AC.MC}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{AM.AC.MC}{4S_{\Delta AMC}} = \frac{\sqrt{13}.3\sqrt{5}.4}{4.6} = \frac{\sqrt{65}}{2}$ (đvtt).

Vậy: $\widehat{C} = 180^0 - \widehat{A} - \widehat{B} = 75^0$.

Câu 4: (1.5 điểm)

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có góc $\widehat{SAC} = \alpha > 45^0$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với đường thẳng SC cắt hình chóp theo một thiết diện. Tính tỉ số diện tích của thiết diện và diện tích đáy $ABCD$ theo α.

Lời giải



Gọi $H = AC \cap BD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Gọi K là giao điểm của (P) và $SC \Rightarrow AK \perp SC$ và $AK \cap SH = I$.

Ta có $SC \perp BD \Rightarrow (P)//BD \Rightarrow (P) \cap (SBD) = B'D'//BD$ và $B'D'$ đi qua I.

Vậy thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $AB'KD'$ có $AK \perp B'D'$.

Theo giả thiết tam giác SAC là tam giác cân tại S và $\widehat{SAC} = \widehat{SCA} = \alpha > 45^0$.
Đặt cạnh đáy của hình vuông $ABCD$ là a.

Ta có: $SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\alpha, AK = a\sqrt{2}\sin\alpha, SA = SC = \frac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha}$.

Trong tam giác vuông SAK ta có

$$SK=\sqrt{SA^2-AK^2}=\sqrt{\frac{2a^2}{4\cos^2\alpha}-2a^2\sin^2\alpha}=\sqrt{\frac{2a^2}{4}\left(\frac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}=\frac{a\sqrt{2}\left|\cos 2\alpha\right|}{2\cos\alpha}.$$

Vì tứ giác $CHIK$ nội tiếp nên: $SI.SH=SK.SC\Rightarrow SI=\dfrac{SK.SC}{SH}=a\sqrt{2}\dfrac{\left|\cos 2\alpha\right|}{\sin 2\alpha}=a\sqrt{2}\left|\cot 2\alpha\right|$

Vậy ta có $B'D'=\dfrac{SI}{SH}.BD=2a\sqrt{2}\dfrac{\left|\cot 2\alpha\right|}{\tan\alpha}$.

Diện tích tứ giác $AB'KD'$ là $S_{AB'KD'}=\dfrac{1}{2}AK.B'D'=2a^2\cos\alpha.\left|\cot 2\alpha\right|$.

Diện tích tứ giác $ABCD$ là $S=a^2$.

Vậy tỉ số diện tích là: $\dfrac{S_{AB'KD'}}{S_{ABCD}}=\dfrac{2a^2\cos\alpha.\left|\cot 2\alpha\right|}{a^2}=2\cos\alpha.\left|\cot 2\alpha\right|$.

Câu 5: (3.0 điểm)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{y^2-x}\right)+1=y^2-2x\\ \sqrt{3y^2-5}+\sqrt{4x-3}=2x+1\end{cases}$ $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải

Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases}3y^2-5\ge 0\\ 4x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y^2-5\ge 0\\ x\ge\dfrac{3}{4}\end{cases}$.

$$4\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{y^2-x}\right)+1=y^2-2x$$

$$\Leftrightarrow\left(2x+1-y^2\right)\left(\frac{4}{\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x+1\right)\left(y^2-x\right)}+\sqrt[3]{\left(y^2-x\right)^2}}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=y^2\ (3)\\ \dfrac{4}{\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x+1\right)\left(y^2-x\right)}+4\sqrt[3]{y^2-x}}+1=0\ (4)\end{array}\right.$$

$$\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x+1\right)\left(y^2-x\right)}+\sqrt[3]{y^2-x}=\left[\sqrt[3]{y^2-x}+\frac{\sqrt[3]{x+1}}{2}\right]^2+\frac{3\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2}{4}>0,\forall x\ge\frac{3}{4},3y^2-5\ge 0$$

Do đó (4) vô nghiệm.

Thay $y^2=2x+1\left(3\right)$ vào phương trình $\sqrt{3y^2-5}+\sqrt{4x-3}=2x+1$ ta được phương trình

$$\sqrt{6x-2}+\sqrt{4x-3}=2x+1$$

Cách 1:

$$\sqrt{6x-2}+\sqrt{4x-3}=2x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{3}{4}\\ \left(2x+1\right)\left[\dfrac{1}{\sqrt{6x-2}-\sqrt{4x-3}}-1\right]=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6x-2}-\sqrt{4x-3}} - 1 = 0 \left(Do\ 2x+1>0\ \forall x \ge \dfrac{3}{4} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{4} \\ \sqrt{6x-2}-\sqrt{4x-3} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{4} \\ \sqrt{6x-2} = \sqrt{4x-3}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{4} \\ 6x-2 = 4x-3+1+2\sqrt{4x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{4} \\ x = \sqrt{4x-3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{4} \\ x^2-4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{4} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array} \right. .$$

Thay $x=1$ vào (3) ta được $y^2=3 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{3}$ (nhận).

Thay $x=3$ vào (3) ta được $y^2=7 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{7}$ (nhận).

Vậy hệ đã cho có tập nghiệm $S=\left\{ \left(1;\sqrt{3}\right), \left(1;-\sqrt{3}\right), \left(3;-\sqrt{7}\right), \left(3;\sqrt{7}\right) \right\}$.

Cách 2:

$$\sqrt{6x-2}+\sqrt{4x-3}=2x+1 \Leftrightarrow \sqrt{6x-2}-(x+1)+\sqrt{4x-3}-x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+4x-3}{\sqrt{6x-2}+x+1}+\frac{-x^2+4x-3}{\sqrt{4x-3}+x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+4x-3=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{6x-2}+x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{4x-3}+x}=0 \left(VN\ voi\ x \ge \dfrac{3}{4} \right) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array} \right. .$$

Thay $x=1$ vào (3) ta được $y^2=3 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{3}$ (nhận).

Thay $x=3$ vào (3) ta được $y^2=7 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{7}$ (nhận).

Vậy hệ đã cho có tập nghiệm $S=\left\{ \left(1;\sqrt{3}\right), \left(1;-\sqrt{3}\right), \left(3;-\sqrt{7}\right), \left(3;\sqrt{7}\right) \right\}$.

Câu 6. (1.5 điểm)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\dfrac{1}{3}<a,b,c<1$. Chứng minh

$$\log_a\left(\frac{3}{4}b-\frac{1}{4}\right)+\log_b\left(\frac{3}{4}c-\frac{1}{4}\right)+\log_c\left(\frac{3}{4}a-\frac{1}{4}\right) \ge 9.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho các số thực dương ta có

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{4}b-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}(3b-1)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.(3b-1) \le b^3 \\ \left(\dfrac{3}{4}c-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}(3c-1)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.(3c-1) \le c^3 \\ \left(\dfrac{3}{4}a-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}(3a-1)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.(3a-1) \le a^3 \end{cases}$$, kết hợp với $\dfrac{1}{3}<a,b,c<1$ ta được:

$$\log_a\left(\frac{3}{4}b-\frac{1}{4}\right)+\log_b\left(\frac{3}{4}c-\frac{1}{4}\right)+\log_c\left(\frac{3}{4}a-\frac{1}{4}\right) \ge \log_a b^3+\log_b c^3+\log_c a^3$$

$= 3\left(\log_a b + \log_b c + \log_c a\right) \overset{AM-GM}{\geq} 9\sqrt[3]{\log_a b.\log_b c.\log_c a} = 9$

Vậy $\log_a\left(\frac{3}{4}b - \frac{1}{4}\right) + \log_b\left(\frac{3}{4}c - \frac{1}{4}\right) + \log_c\left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\right) \geq 9$.

Dấu $"="$ xảy ra khi: $a = b = c = \frac{1}{2}$.

----------- Hết ----------