SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ TĨNH

ĐỀ THI TRỰC TUYẾN LẦN 3

(*Đề thi có 06 trang*)

**KỲ THI THỬ THPT QUỐC GIA NĂM 2023**

**Bài thi: TOÁN**

*Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề*

**Họ, tên thí sinh:**.................................................................

**Số báo danh:**......................................................................

**Mã đề thi 333**

**Câu 1.** Phần thực của số phức $z = 4 - 2i$ bằng

**A.** 4. **B.** 2. **C.** $-2$. **D.** $-4$.

**Câu 2.** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $4$ | ↘ | $1$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

**A.** $(1; +\infty)$. **B.** $(-1; 0)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $(-1; 1)$.

**Câu 3.** Nếu $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$ và $\int\limits_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = -5$ thì $\int\limits_1^4 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-11$. **B.** 1. **C.** 11. **D.** $-1$.

**Câu 4.** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^2$ bằng

**A.** $2\log_5 a$. **B.** $\dfrac{1}{2}\log_5 a$. **C.** $2 + \log_5 a$. **D.** $\dfrac{1}{2} + \log_5 a$.

**Câu 5.** Đạo hàm của hàm số $y = 2^x$ là

**A.** $y' = x2^{x-1}$. **B.** $y' = 2^x \ln 2$. **C.** $y' = 2^x$. **D.** $y' = \dfrac{2^x}{\ln 2}$.

**Câu 6.** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $z = -1 + 2i$ là điểm nào dưới đây?

**A.** $N(1; -2)$. **B.** $M(-1; -2)$. **C.** $Q(1; 2)$. **D.** $P(-1; 2)$.

**Câu 7.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x) > 3$ là

**A.** $(0; 3)$. **B.** $\left(0; \dfrac{8}{3}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{8}{3}; +\infty\right)$. **D.** $(3; +\infty)$.

**Câu 8.** Cho khối hộp chữ nhật có ba kích thước 2; 6; 7. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

**A.** 14. **B.** 84. **C.** 28. **D.** 15.

**Câu 9.** Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{5}{4}}$ là

**A.** $y' = \dfrac{5}{4}x^{-\frac{1}{4}}$. **B.** $y' = \dfrac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$. **C.** $y' = \dfrac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}$. **D.** $y' = \dfrac{4}{5}x^{\frac{1}{4}}$.

**Câu 10.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1 = 3$ và công bội $q = 4$. Giá trị của $u_2$ bằng

**A.** 12. **B.** 64. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** 81.

**Câu 11.** Cho hình nón có bán kính đáy $r$ và độ dài đường sinh $l$. Diện tích xung quanh $S_{xq}$ của hình nón đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

**A.** $S_{xq} = 2\pi rl$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{4}{3}\pi rl$. **C.** $S_{xq} = \pi rl$. **D.** $S_{xq} = 4\pi rl$.

**Câu 12.** Với $n$ là số nguyên dương bất kì, $n \geq 2$, công thức nào dưới đây đúng?

**A.** $\mathrm{A}_n^2 = \dfrac{2!}{(n-2)!}$. **B.** $\mathrm{A}_n^2 = \dfrac{n!}{2!(n-2)!}$. **C.** $\mathrm{A}_n^2 = \dfrac{n!}{(n-2)!}$. **D.** $\mathrm{A}_n^2 = \dfrac{(n-2)!}{n!}$.

**Câu 13.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$ là đường thẳng

**A.** $x = -2$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -1$.

**Câu 14.** Cho hai số phức $z = 1 - i$ và $w = 7 + 3i$. Số phức $2z - w$ có tổng phần thực và phần ảo bằng

**A.** $10$. **B.** $-5$. **C.** $0$. **D.** $-10$.

**Câu 15.**

Cho hàm số $Y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**A.** $x = 1$. **B.** $x = -1$.

**C.** $x = -3$. **D.** $x = 2$.

**Câu 16.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $4$.

**Câu 17.** Cho khối lập phương có cạnh bằng 2. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

**A.** $6$. **B.** $4$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $8$.

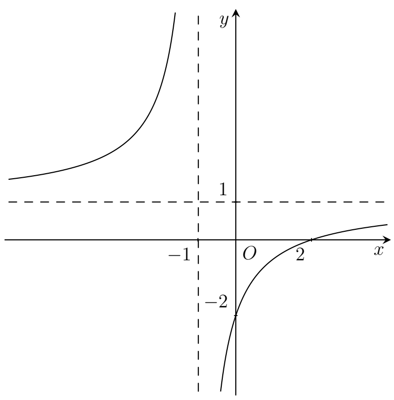
**Câu 18.** Hàm số $y = \ln x + \dfrac{1}{x}$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

**A.** $y = \ln x + 1$. **B.** $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$. **C.** $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x - \dfrac{1}{x}$. **D.** $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x - \dfrac{1}{x^2}$.

**Câu 19.**

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.
Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành là

**A.** $(-2;0)$. **B.** $(2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;-2)$.



**Câu 20.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

**A.** $9$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $3$. **D.** $\sqrt{15}$.

**Câu 21.** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x > 9$ là

**A.** $S=(-\infty;-2)$. **B.** $S=(-2;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;2)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

**Câu 22.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)$ có phương trình $3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Khoảng cách $d$ từ $A$ đến mặt phẳng $(P)$ là

**A.** $d=\dfrac{5}{29}$. **B.** $d=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $d=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$. **D.** $d=\dfrac{5}{9}$.

**Câu 23.** Cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$ và $(Q)\colon mx+y-2z+1=0$. Với giá trị nào của $m$ thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau?

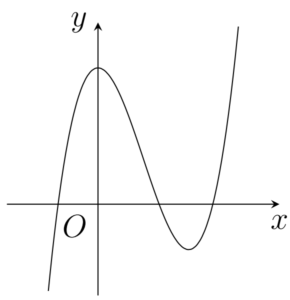
**A.** $m=6$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-6$. **D.** $m=1$.

**Câu 24.**

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

**A.** $y=x^3-3x^2+3$. **B.** $y=x^4-2x^2+3$.

**C.** $y=-x^3+3x^2+3$. **D.** $y=-x^4+2x^2+3$.




**Câu 25.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của $(P)$?

**A.** $\overrightarrow{n}_2=(1;2;-2)$. **B.** $\overrightarrow{n}_4=(1;-2;-3)$. **C.** $\overrightarrow{n}_3=(1;2;2)$. **D.** $\overrightarrow{n}_1=(1;-2;2)$.

**Câu 26.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=4-2t \\ y=-3+t \\ z=1-t \end{cases}$, giao điểm của $d$ với mặt phẳng $(Oxy)$ có tọa độ là

**A.** $(4;-3;0)$. **B.** $(2;-2;0)$. **C.** $(0;-1;-1)$. **D.** $(-2;0;-2)$.

**Câu 27.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x+2)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào?

**A.** $(0;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;0)$.

**Câu 28.** Cho hàm số $f(x)=3+\cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3x+\cos x+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\sin x+C$.

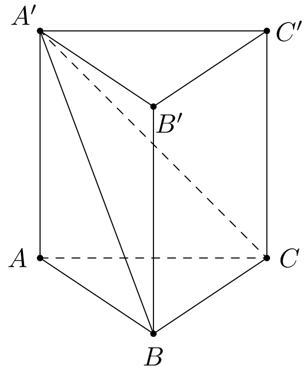
**C.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3x-\sin x+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3x+\sin x+C$.

**Câu 29.** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(8;1;2)$ trên trục $Ox$ có tọa độ là

**A.** $(8;0;0)$. **B.** $(0;0;2)$. **C.** $(0;1;2)$. **D.** $(0;1;0)$.

**Câu 30.**

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$, $BC = 2a\sqrt{3}$ *(tham khảo hình vẽ bên)*. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(ABC)$ bằng




**A.** $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

**Câu 31.** Biết rằng $\int\limits_1^5 \frac{3}{x^2+3x}\,dx = a\ln 5 + b\ln 2\,(a, b \in Z)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $2a - b = 0$. **B.** $a + b = 0$. **C.** $a - b = 0$. **D.** $a + 2b = 0$.

**Câu 32.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho hình phẳng $(H)$ giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 4$ và $y = 2x - 4$. Tính thể tích $V$ của khối tròn xoay tạo bởi khi quay $(H)$ quanh trục hoành.

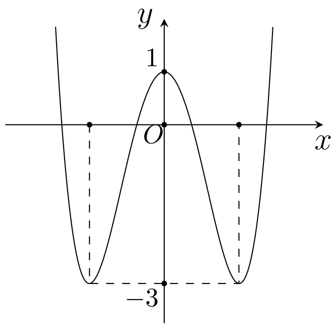
**A.** $V = \frac{168\pi}{5}$. **B.** $V = \frac{168}{5}$. **C.** $V = \frac{32\pi}{5}$. **D.** $V = \frac{32}{5}$.

**Câu 33.** Biết phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2(2x) - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$. Tính $x_1 \cdot x_2$.

**A.** $x_1 \cdot x_2 = 4$. **B.** $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{8}$. **C.** $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$. **D.** $x_1 \cdot x_2 = -3$.

**Câu 34.**

Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) - 1 = 0$ là




**A.** 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

**Câu 35.** Một nhóm gồm 3 học sinh lớp 10, 3 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 được xếp ngồi vào một hàng có 9 ghế, mỗi học sinh ngồi 1 ghế. Tính xác suất để 3 học sinh lớp 10 không ngồi 3 ghế liền nhau.

**A.** $\frac{11}{12}$. **B.** $\frac{1}{12}$. **C.** $\frac{7}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

**Câu 36.** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 1$. Số phức $w = 2z + 1 - i$ có tập hợp điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức là đường tròn có

**A.** tâm $I(-3; 5)$ và bán kính $R = 2$. **B.** tâm $I(-2; -6)$ và bán kính $R = 2$.

**C.** tâm $I(2; 6)$ và bán kính $R = 2$. **D.** tâm $I(3; -5)$ và bán kính $R = 2$.

**Câu 37.** Trong không gian $Oxyz$, cho $E\,(-1; 0; 2)$ và $F\,(2; 1; -5)$. Phương trình đường thẳng $EF$ là

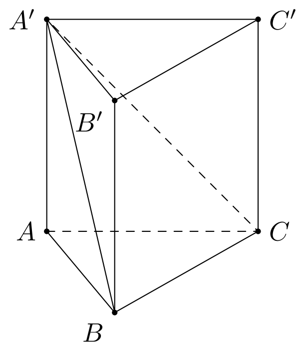
**A.** $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$. **B.** $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}$.

**C.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$. **D.** $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-7}$.

**Câu 38.**

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $B$, $AC = a\sqrt{5}$, $BC = 2a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm $C'$ đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

**A.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.




**Câu 39.** Có bao nhiêu số nguyên $x$ thỏa mãn $\log_2 \dfrac{x^2-1}{81} < \log_3 \dfrac{x^2-1}{16}$?

**A.** 68. **B.** 73. **C.** 70. **D.** 72.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của bất phương trình đã cho là $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1. \end{array}\right.$

Ta có

$$\begin{aligned}
& \log_2 \frac{x^2-1}{81} < \log_3 \frac{x^2-1}{16} \\
\Leftrightarrow\ & \log_2\left(x^2-1\right) - \log_2 81 < \log_3\left(x^2-1\right) - \log_3 16 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2 3 \cdot \log_3\left(x^2-1\right) - 4\log_2 3 < \log_3\left(x^2-1\right) - 4\log_3 2 \\
\Leftrightarrow\ & (\log_2 3 - 1)\log_3\left(x^2-1\right) < 4\left(\log_2 3 - \log_3 2\right) \\
\Leftrightarrow\ & \log_3\left(x^2-1\right) < \frac{4\left(\log_2 3 - \log_3 2\right)}{\log_2 3 - 1} \\
\Leftrightarrow\ & \log_3\left(x^2-1\right) < \frac{4\left(\dfrac{1}{\log_3 2} - \log_3 2\right)}{\dfrac{1}{\log_3 2} - 1} \\
\Leftrightarrow\ & \log_3\left(x^2-1\right) < 4\left(1 + \log_3 2\right) \\
\Leftrightarrow\ & \log_3\left(x^2-1\right) < \log_3 6^4 \\
\Leftrightarrow\ & 0 < x^2 - 1 < 6^4 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} -\sqrt{1297} < x < -1 \\ 1 < x < \sqrt{1297}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vì $x$ là số nguyên nên $x \in \{-36; -35; \ldots; -2; 2; \ldots; 35; 36\}$.

Vậy có 70 số nguyên $x$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

**Câu 40.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ thỏa mãn $f(x) = \sqrt{x} + \displaystyle\int_0^1 x f(x^4)\,\mathrm{d}x$. Giá trị của tích phân $I = \displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $I = 2$. **B.** $I = \dfrac{3}{22}$. **C.** $I = \dfrac{1}{2}$. **D.** $I = \dfrac{22}{3}$.

**Lời giải.**

Đặt $m = \int\limits_0^1 xf(x^4)\,\mathrm{d}x$. Suy ra

$$m = \int\limits_0^1 xf(x^4)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 [x(x^2+m)]\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Từ đó, ta có $I = \int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{22}{3}$.

Chọn đáp án D □

**Câu 41.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + xf'(x) + f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$.

**A.** $S = 8$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 8\pi$. **D.** $S = 4\pi$.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} & f(x) + xf'(x) + f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4 \\ \Leftrightarrow\ & f(x) + (x+1)f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4\ (*) \\ \Leftrightarrow\ & [(x+1)f(x)]' = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4 \end{aligned}$$

mà $\int \left(4x^3 - 6x^2 - 2x + 4\right)\,\mathrm{d}x = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + C$ nên

$$(x+1)f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + C_1.$$

Cho $x = -1$ thì $0 = -2 + C_1$ suy ra $C_1 = 2$, ta được $(x+1)f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + 2$.

- Với $x = -1$ thay vào $(*)$ thì $f(-1) = -4$;
- Với $x \neq -1$ thì $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$,

Do đó, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

Xét phương trình $f(x) = f'(x) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = 3x^2 - 6x + 2$.

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Do đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ là

$$S = \int\limits_0^4 |f(x) - f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^4 \left|x^3 - 6x^2 + 8x\right|\,\mathrm{d}x$$

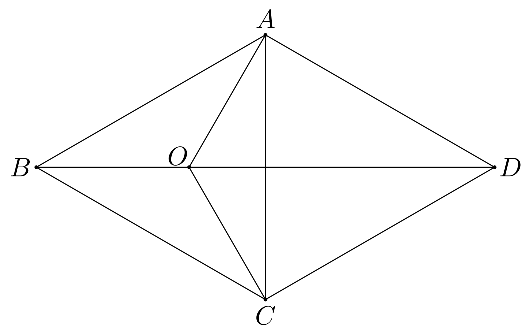
$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \left|x^3-6x^2+8x\right| \mathrm{d}x + \int_2^4 \left|x^3-6x^2+8x\right| \mathrm{d}x \\
&= \left|\int_0^2 \left(x^3-6x^2+8x\right) \mathrm{d}x\right| + \left|\int_2^4 \left(x^3-6x^2+8x\right) \mathrm{d}x\right| \\
&= 8.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

**Câu 42.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $2a$ và $\widehat{ABC} = 60°$. Biết $AA' = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$ và điểm $A'$ cách đều các điểm $A$, $B$, $C$. Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

**A.** $16a^3\sqrt{3}$. **B.** $4a^3\sqrt{3}$. **C.** $2a^3\sqrt{3}$. **D.** $8a^3\sqrt{3}$.

**Lời giải.**



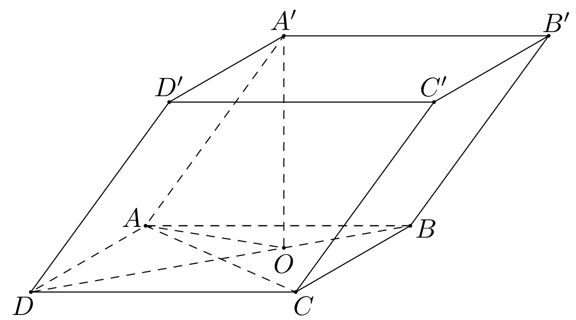

Tam giác $ABC$ là tam giác đều nên

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot \frac{4a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}.$$

Gọi $O$ là trọng tâm $\triangle ABC$, ta có

$$\begin{cases} A'A = A'B = A'C \\ OA = OB = OC. \end{cases}$$

Khi đó $O$ thuộc trục của đa giác đáy $ABC$, suy ra $A'O \perp (ABC)$.




Tam giác $AOA'$ vuông tại $O$ có

$$\begin{cases} AO = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \\ A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = 2a. \end{cases}$$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'O \cdot S_{ABCD} = 4a^3\sqrt{3}$.

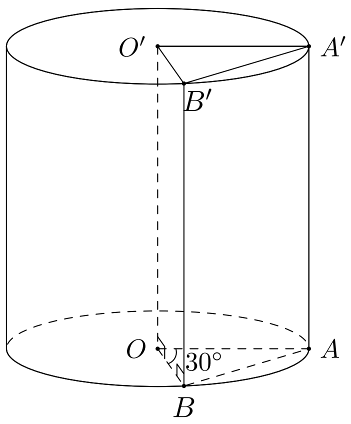
Chọn đáp án (B) □

**Câu 43.** Một hình trụ có chiều cao bằng $2a$, bán kính đáy bằng $a$. Gọi $O, O'$ là tâm hai mặt đáy. Kẻ hai bán kính $OA$ và $O'B'$ lần lượt nằm trên hai mặt đáy sao cho góc giữa chúng bằng $30^0$. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng $AB'$ và song song với $OO'$. Tính diện tích thiết diện tạo thành khi cắt hình trụ nói trên bởi mặt phẳng $(\alpha)$.

**A.** $a^2\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **B.** $2a^2$. **C.** $2a^2\left(2-\sqrt{3}\right)$. **D.** $2a^2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

**Lời giải.**

Gọi $A'$, $B$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A$ và $B'$ trên mặt đáy còn lại của hình trụ.




Khi đó mp$(ABB'A') \equiv (\alpha)$ và thiết diện tạo thành khi cắt hình trụ nói trên bởi mặt phẳng $(\alpha)$ là hình chữ nhật $ABB'A'$.
Ta có $\widehat{AOB} = (OA, O'B') = 30°$.
Xét tam giác $OAB$ có

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 30° = a^2\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

$\Rightarrow AB = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
Lại có $AA' = OO' = 2a$.
Suy ra diện tích thiết diện $ABB'A'$ là $S = AB \cdot AA' = 2a^2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
Chọn đáp án D □

**Câu 44.** Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 2m^2 - 2m = 0$, với $m$ là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10; 10)$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1$, $z_2$ thỏa mãn $|z_1 - 2| = |z_2 - 2|$.

**A.** 17. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 14.

**Lời giải.**

Đặt $w = z - 2$, ta được phương trình

$$\begin{aligned} & (w+2)^2 - 2m(w+2) + 2m^2 - 2m = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & w^2 - (2m-4)w + 2m^2 - 6m + 4 = 0. \quad (1) \end{aligned}$$

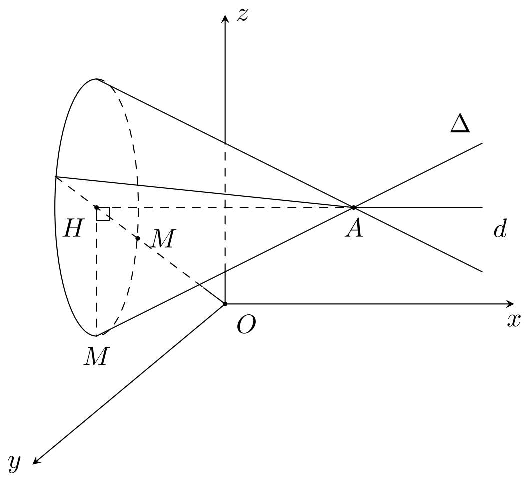
Khi đó bài toán trở thành tìm $m$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $w_1$, $w_2$ thỏa mãn $|w_1| = |w_2|$.
Xét phương trình (1) có $\Delta' = (m-2)^2 - 2m^2 + 6m - 4 = -m^2 + 2m$.
**Trường hợp 1**: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \in (0; 2)$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 1$.
Thay vào phương trình ta được $w^2 + 2w = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} w = 0 \\ w = -2 \end{array}\right.$ không thỏa mãn yêu cầu đề bài.
**Trường hợp 2**: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
Khi đó phương trình luôn có hai nghiệm phức phân biệt không phải số thực, hai nghiệm này là hai số phức liên hợp nên mô-đun của chúng luôn bằng nhau.
Kết hợp với điều kiện $m$ là số nguyên và $m \in (-10; 10)$.
Suy ra $m \in \{-9; -8; \ldots; -1\} \cup \{3; 4; \ldots; 9\}$.
Vậy có 16 giá trị của $m$ thoả mãn.
Chọn đáp án B □

**Câu 45.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 3; 4)$. Xét các đường thẳng $\Delta$ qua $A$ và tạo với $(Oyz)$ một góc $45°$. Gọi $M$ là giao điểm của đường thẳng $\Delta$ với mặt phẳng $(Oyz)$. Khi $OM$ nhỏ nhất, $\Delta$ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; a; b)$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

**A**. 1. **B**. 5. **C**. 10. **D**. 13.

**Lời giải.**

Gọi $d$ là đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc mặt phẳng $(Oyz)$.




Suy ra $d$: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = 4. \end{cases}$

Gọi $H = d \cap (Oyz) \Rightarrow H(0; 3; 4)$ và $AH = 1$.

Ta có $\left(\widehat{\Delta, (Oyz)}\right) = \widehat{AMH} = 45°$.

Xét tam giác $AHM$ vuông tại $H$ có $MH = AH \cdot \cot 45° = 1$.

Suy ra $M$ nằm trên đường tròn tâm $H$ bán kính $R = MH = 1$.

Ta có $OM$ nhỏ nhất khi $O, H, M$ thẳng hàng và $M$ ở giữa $O, H$.

Suy ra $OM$ đạt nhỏ nhất khi $OM = OH - HM = 5 - 1 = 4$.

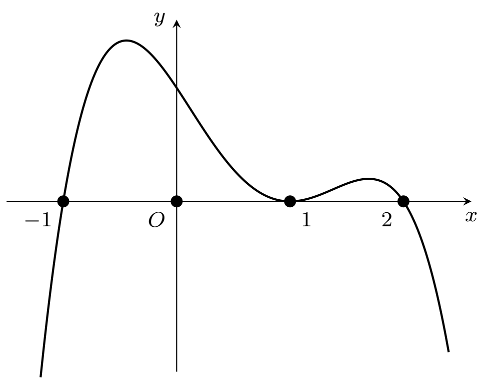
Ta lại có $\dfrac{OM}{OH} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{OH} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{4}{5} \cdot 0 = 0 \\ y_M = \dfrac{4}{5} \cdot 3 = \dfrac{12}{5} \\ z_M = \dfrac{4}{5} \cdot 4 = \dfrac{16}{5}. \end{cases}$

Suy ra $M\left(0; \dfrac{12}{5}; \dfrac{16}{5}\right)$.

Vậy vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{MA} = \left(1; \dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$.

Chọn đáp án A □

**Câu 46.** Cho hàm số đa thức $f(x) = mx^5 + nx^4 + px^3 + qx^2 + hx + r \quad (m, n, p, q, h, r \in \mathbb{R})$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ (như hình vẽ) cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là $-1$; $2$; và tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ là $1$.




Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) - r|$ là

**A**. 3. **B**. 2. **C**. 5. **D**. 7.

**Lời giải.**

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra $f'(x) = m(x+1)(x-1)^2(x-2)$ với $m < 0$.

Đặt $h(x) = f(x) - r = f(x) - f(0) \Rightarrow h'(x) = f'(x)$.

Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $h(-1)$ | | $\nearrow$ | | $h(2)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Ta có: $h(-1) = f(-1) - f(0) < 0$; $h(2) = f(2) - f(0) > 0$.

Suy ra phương trình $h(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án C $\square$

**Câu 47.** Tìm tất cả giá trị của số thực $m$ sao cho có ít nhất một số phức $z$ thỏa mãn $|z| = m$ và $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$.

**A.** $2 \le m \le 2\sqrt{2}$. **B.** $2 \le m \le 1 + \sqrt{2}$.

**C.** $\sqrt{2} \le m \le \sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5} - 1 \le m \le 2 + \sqrt{2}$.

**Lời giải.**

Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ và gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z$, ta có

- $|z| = m \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $O$ bán kính $m$ khi $m > 0$, $M \equiv O$ khi $m = 0$ và không tồn tại $M$ nếu $m < 0$.
- $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2| \Leftrightarrow 2|x| + 2|y| = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2|x| - 2|y| = 0$. (1)

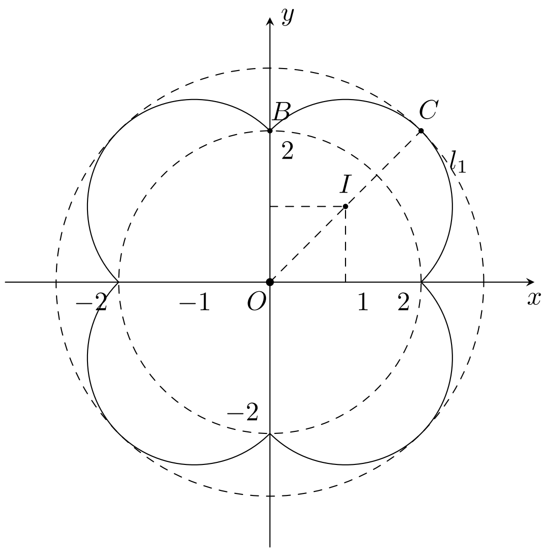
  Xét trường hợp $x \ge 0$, $y \ge 0$, phương trình (1) trở thành

  $$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

  là phương trình của đường tròn $(C)$ tâm $I(1; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$. Như vậy tập hợp các điểm $M$ trong góc phần tư thứ nhất thỏa mãn (1) là phần đường tròn $(C)$ nằm trong góc phần tư đó (ta gọi là cung $(l_1)$).

  Dễ thấy $(x; y)$ là một nghiệm của (1) thì $(-x; y)$, $(x; -y)$, $(-x; -y)$ cũng là nghiệm của (1), nên tập hợp các điểm thỏa mãn (1) đối xứng qua hai trục tọa độ và qua $O$.

  Do đó, bằng cách lấy đối xứng của $(l_1)$ qua các trục tọa độ và qua $O$ ta được tập hợp các điểm $M$ là đường cong $(H)$ (như hình vẽ dưới đây).




Yêu cầu của đề bài tương đương $m \geq 0$ và đường tròn $(O, m)$ với đường cong $(H)$ có ít nhất một điểm chung. Từ đó ta có điều kiện của $m$ là

$$OB \leq m \leq OC \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án A □

**Câu 48.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 1 = 0$, $(Q): x - 2y + 2z - 8 = 0$, $(R): x - 2y + 2z + 4 = 0$. Một đường thẳng $\Delta$ thay đổi cắt ba mặt phẳng $(P)$, $(Q)$, $(R)$ lần lượt tại các điểm $A$, $B$, $C$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $AB + \dfrac{96}{AC^2}$ là

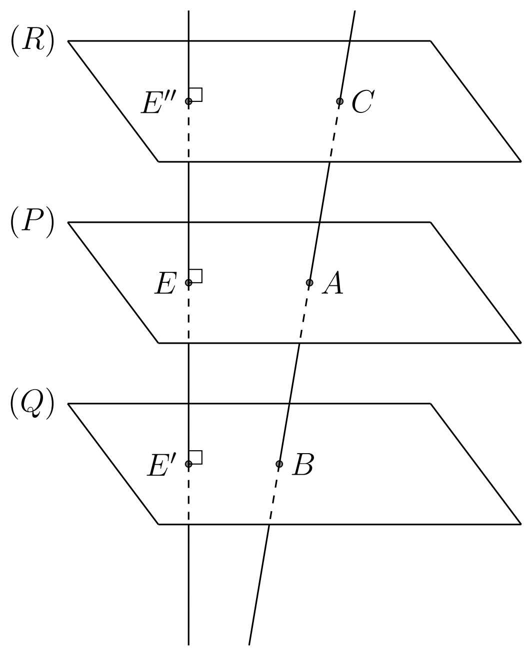
**A**. $\dfrac{41}{3}$. **B**. 99. **C**. 18. **D**. 24.

**Lời giải.**

Dễ thấy các mặt phẳng $(P)$, $(Q)$ và $(R)$ song song với nhau. Do giả thiết suy ra $\mathrm{d}\left((R), (P)\right) = EE'' = 1$ và $\mathrm{d}\left((P), (Q)\right) = EE' = 3$.

Theo định lý Ta-lét trong không gian ta có $\dfrac{E''E}{EE'} = \dfrac{AC}{AB}$ suy ra $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow AB = 3AC$.

Đặt $S = AB + \dfrac{96}{AC^2}$ suy ra $S = 3AC + \dfrac{96}{AC^2}$.




Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM -GM

$$S = \frac{3AC}{2} + \frac{3AC}{2} + \frac{96}{AC^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3AC}{2} \cdot \frac{3AC}{2} \cdot \frac{96}{AC^2}} \Leftrightarrow S \geq 18.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{3AC}{2} = \dfrac{96}{AC^2} \Leftrightarrow AC^3 = 64 \Leftrightarrow AC = 4$.

Vậy $\min S = 18$ khi $AC = 4$.

Chọn đáp án C □

**Câu 49.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để phương trình

$$2^{3^m} \cdot 7^{x^2-2x} + 7^{3^m} \cdot 2^{x^2-2x} = 14^{3^m}\left(7x^2 - 14x + 2 - 7 \cdot 3^m\right)$$

có bốn nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn $-1$?

**A.** 10. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 8.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
& 2^{3^m} \cdot 7^{x^2-2x} + 7^{3^m} \cdot 2^{x^2-2x} = 14^{3^m}\left(7x^2 - 14x + 2 - 7 \cdot 3^m\right) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{7^{x^2-2x}}{7^{3^m}} + \frac{2^{x^2-2x}}{2^{3^m}} = 7x^2 - 14x + 2 - 7 \cdot 3^m \\
\Leftrightarrow\ & 7^{x^2-2x-3^m} + 2^{x^2-2x-3^m} = 7\left(x^2 - 2x - 3^m\right) + 2. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Đặt $x^2 - 2x - 3^m = a$.

Khi đó $(*)$ trở thành $7^a + 2^a = 7a + 2 \Leftrightarrow 7^a + 2^a - 7a - 2 = 0$.

Xét hàm số $f(a) = 7^a + 2^a - 7a - 2$.

Ta có $f'(a) = 7^a \ln 7 + 2^a \ln 2 - 7$.

Ta có $f''(a) = 7^a (\ln 7)^2 + 2^a (\ln 2)^2 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f'(a)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $f'(a) = 0$ có tối đa 1 nghiệm.

Mà $f'(0) = \ln 7 + \ln 2 - 7 < 0$ và $f'(1) = 7\ln 7 + 2\ln 2 - 7 > 0$.

Suy ra $f'(a) = 0$ có nghiệm duy nhất $a_0 \in (0; 1)$.

Suy ra $f(a) = 0$ có tối đa 2 nghiệm.

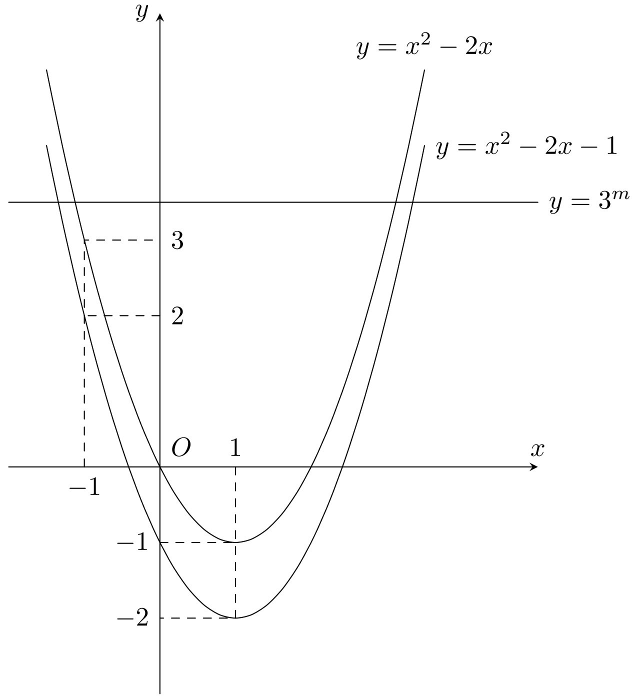
Bảng biến thiên của $y = f(a)$

| $a$ | $-\infty$ | | $0$ | | $a_0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | | | $-$ | $0$ | $+$ | | | |
| $f(a)$ | $+\infty$ | | $0$ | | $f(a_0)$ | | $0$ | | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có $f(a) = 0$ có đúng 2 nghiệm $a = 0$ và $a = 1$.

Từ đó $\left[\begin{array}{l} a = x^2 - 2x - 3^m = 0 \\ a = x^2 - 2x - 3^m = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^m = x^2 - 2x \\ 3^m = x^2 - 2x - 1. \end{array}\right. \qquad (**)$

Để $(*)$ có 4 nghiệm thực phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn $-1$ thì $(**)$ có 4 nghiệm thực phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn $-1$ hay tương đương với đồ thị hàm số $y = 3^m$ cắt đồ thị các hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = x^2 - 2x - 1$ tại 4 điểm phân biệt trong đó có đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn $-1$.




Dựa vào đồ thị ta có $3^m \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Suy ra $m \in \{1; 2; \ldots; 10\}$.

Vậy có 10 giá trị của $m$ thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án A $\square$

**Câu 50.** Có bao nhiêu số nguyên $m$ thuộc khoảng $(-10; 10)$ để hàm số $y = |2x^3 - 2mx + 3|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

**A.** 12. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 7.

**Lời giải.**

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 2mx + 3$.

Ta có $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{ nếu } f(x) < 0. \end{cases}$

Do đó, đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị nằm phía trên trục hoành;
- Lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{m}{3}$.

- TH1. $m \leq 0$, ta có:

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lvert f(x)\rvert$ | $+\infty$ $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

- TH2. $-\dfrac{4}{3}m\sqrt{\dfrac{m}{3}} + 3 < 0 \Leftrightarrow m > \sqrt[3]{\dfrac{243}{16}}$, ta có:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $-\sqrt{\frac{m}{3}}$ | | $x_2$ | | $\sqrt{\frac{m}{3}}$ | | $x_3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $+$ | | $0$ | | $-$ | | $0$ | | $+$ | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{3}m\sqrt{\frac{m}{3}}+3$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{4}{3}m\sqrt{\frac{m}{3}}+3$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Trong hai trường hợp trên, hàm số $y=|f(x)|=|2x^3-2mx+3|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi phương trình $2x^3-2mx+3=0 \quad (*)$ có nghiệm $x_1\le x_2\le x_3\le 1$.

$$(*)\Leftrightarrow m=\frac{2x^3+3}{2x}=g(x).$$

Ta có
$$g'(x)=\frac{6x^2\cdot 2x-2(2x^3+3)}{4x^2}=\frac{4x^3-3}{2x^2}.$$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | | | |
| $g$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty \Vert +\infty$ | $\searrow$ | $\frac{9}{4\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}$ | $\nearrow$ | $\frac{5}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Suy ra $(*)$ có nghiệm $x_1\le x_2\le x_3\le 1 \Leftrightarrow m\le \frac{5}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m>\sqrt[3]{\frac{243}{16}} \end{array}\right.$, ta được $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ \sqrt[3]{\frac{243}{16}}<m\le\frac{5}{2}. \end{array}\right.$

Suy ra trong $(-10;10)$ có 10 giá trị nguyên của $m\in\{-9;-8;\ldots;-1;0\}$ thỏa mãn bài toán.

- TH3. $0<m\le\sqrt[3]{\frac{243}{16}}$, ta có:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $-\sqrt{\frac{m}{3}}$ | | $\sqrt{\frac{m}{3}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $+$ | | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{3}m\sqrt{\frac{m}{3}}+3$ | $\searrow$ | $-\frac{4}{3}m\sqrt{\frac{m}{3}}+3\ge 0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Trong TH3, hàm số $y = |f(x)| = |2x^3 - 2mx + 3|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\sqrt{\frac{m}{3}} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 3.$$

Kết hợp với điều kiện $0 < m \leq \sqrt[3]{\frac{243}{16}}$, ta được $0 < m \leq \sqrt[3]{\frac{243}{16}}$.
Suy ra trong $(-10; 10)$ có 2 giá trị nguyên của $m \in \{1; 2\}$ thỏa mãn bài toán.

Vậy có tất cả 12 giá trị nguyên của $m \in \{-9; -8; \ldots; 0; 1; 2\}$ thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án A □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN VẮN TẮT

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** A | **6** D | **11** C | **16** D | **21** A | **26** B | **31** B | **36** D | **41** A | **46** C |
| **2** C | **7** C | **12** C | **17** D | **22** C | **27** D | **32** C | **37** B | **42** B | **47** A |
| **3** C | **8** B | **13** C | **18** B | **23** A | **28** D | **33** A | **38** C | **43** D | **48** C |
| **4** A | **9** B | **14** D | **19** B | **24** A | **29** A | **34** B | **39** C | **44** B | **49** A |
| **5** B | **10** A | **15** B | **20** C | **25** D | **30** A | **35** A | **40** D | **45** A | **50** A |