SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm có 6 trang)

KÌ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2023

Bài thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Mã đề: 012

Câu 1. Xác định số điểm cực trị của hàm số $y=x^4-10x^2+1$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 2. Xác định nghiệm của phương trình $5^{x-3}=25$.

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=5$. **D.** $x=4$.

Câu 3. Tính thể tích của khối trụ tròn xoay có bán kính đáy r và chiều cao h.

A. $\frac{1}{3}\pi r^2h$. **B.** πr^2h. **C.** $2\pi rh$. **D.** $\frac{4}{3}\pi r^2h$.

Câu 4. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\int 4x^3\mathrm{d}x=4x^4+C$. **B.** $\int 4x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+C$. **C.** $\int 4x^3\mathrm{d}x=12x^2+C$. **D.** $\int 4x^3\mathrm{d}x=x^4+C$.

Câu 5. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1(2x-1)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=3$. **C.** $I=0$. **D.** $I=1$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-3;2)$ và $B(2;1;1)$. Hãy xác định toạ độ vectơ $\overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{AB}=(1;2;1)$. **B.** $\overrightarrow{AB}=(1;-4;-1)$. **C.** $\overrightarrow{AB}=(1;4;1)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=(1;4;-1)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Khi đó hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Câu 8. Rút gọn biểu thức $Q=b^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{b}$ với $b>0$ ta được

A. $Q=b^4$. **B.** $Q=b^2$. **C.** $Q=b$. **D.** $Q=b^3$.

Câu 9. Biết $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_1^2 g(x)\mathrm{d}x=3$. Tính giá trị của $\int\limits_1^2[f(x)-2g(x)]\mathrm{d}x$.

A. -4. **B.** -1. **C.** 8. **D.** 1.

Câu 10. Xác định giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+x$ trên $[0;2]$.

A. 0. **B.** -2. **C.** 10. **D.** 2.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, xác định toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của $A(1;-1;4)$ lên mặt phẳng (Oyz).

A. $H(1;0;0)$. **B.** $H(1;0;4)$. **C.** $H(0;-1;0)$. **D.** $H(0;-1;4)$.

Câu 12. Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh bằng a và chiều cao bằng $4a$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

A. $\frac{16}{3}a^3$. **B.** $\frac{4}{3}a^3$. **C.** $16a^3$. **D.** $4a^3$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Xác định giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$.

A. $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=2$.

Câu 14. Cho khối chóp có diện tích đáy $B=8a^2$ và chiều cao $h=a$. Tính thể tích khối chóp đã cho.

A. $\frac{4}{3}a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $\frac{8}{3}a^3$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OA}=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$. Xác định toạ độ điểm A.

A. $(-1;1;2)$. **B.** $(-1;1;-2)$. **C.** $(1;-1;2)$. **D.** $(1;-1;-2)$.

Câu 16. Với a là số dương tuỳ ý, khi đó $\log_5 a^3$ bằng

A. $3+\log_5 a$. **B.** $\frac{1}{3}+\log_5 a$. **C.** $3\log_5 a$. **D.** $\frac{1}{3}\log_5 a$.

Câu 17. Xác định toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\frac{3x-2}{x+1}$ với trục tung.

A. $M(-2;0)$. **B.** $M(0;-2)$. **C.** $M\left(0;\frac{2}{3}\right)$. **D.** $M\left(\frac{2}{3};0\right)$.

Câu 18. Xác định toạ độ tâm của mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=12$.

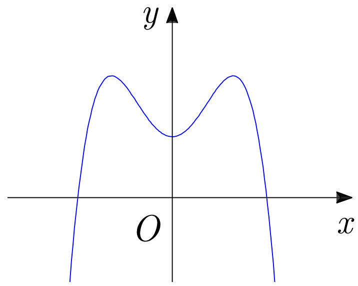
A. $I(-2;2;12)$. **B.** $I(1;-2;0)$. **C.** $I(1;-2;-12)$. **D.** $I(-1;2;0)$.

Câu 19. Cho $F(x)=\int(e^x-1)\mathrm{d}x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $F(x)=e^x+x+C$. **B.** $F(x)=e^x-x+C$.

C. $F(x)=e^x+C$. **D.** $F(x)=-e^x+x+C$.

Câu 20. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình sau?



A. $y=x^2-3x+1$. **B.** $y=-x^4+2x^2+1$. **C.** $y=-x^3+3x+1$. **D.** $y=x^4-2x^2+1$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y-z-4=0$. Hãy xác định giao điểm của mặt phẳng (P) và trục Oz.

A. $M(0;0;-4)$. **B.** $M(0;0;4)$. **C.** $M(2;0;0)$. **D.** $M(-2;0;0)$.

Câu 22. Xác định tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$.

A. $y=2$. **B.** $y=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, hãy xác định toạ độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có phương trình $3x-y-z+2=0$.

A. $\overrightarrow{n}=(-1;-1;2)$. **B.** $\overrightarrow{n}=(3;-1;-1)$. **C.** $\overrightarrow{n}=(3;1;1)$. **D.** $\overrightarrow{n}=(3;-1;2)$.

Câu 24. Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4. Xác định độ dài đường sinh của hình nón (N).

A. 5. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 1. **D.** 12.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Xác định số nghiệm của phương trình $f(x)=1$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 26. Xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-2x^2+mx-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\le\dfrac{2}{3}$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m\ge\dfrac{4}{3}$.

Câu 27. Trên khoảng $(0;+\infty)$, xác định đạo hàm của hàm số $y=\log x$.

A. $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{10\ln x}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{x}$. **D.** $y'=\dfrac{\ln 10}{x}$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - z + 1 = 0$. Điểm nào trong các điểm sau thuộc mặt phẳng (P)?

A. $M(1;7;3)$. **B.** $M(0;-3;0)$. **C.** $M(0;3;2)$. **D.** $M(1;3;0)$.

Câu 29. Tính giá trị của biểu thức 2^{2x+1} biết rằng $2^x = 5$.

A. 10. **B.** 11. **C.** 50. **D.** 25.

Câu 30. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x-1)^{-3}$.

A. $D = (1;+\infty)$. **B.** $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. **C.** $D = \mathbb{R}$. **D.** $D = (-\infty;1)$.

Câu 31. Xác định công thức tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x+1}$, $y = 0$; $x = 0$, $x = 4$ khi quay quanh trục Ox.

A. $V = \pi\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$. **B.** $V = \int_0^4 (2x+1)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V = \pi\int_0^4 (2x+1)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V = \int_0^4 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Câu 32. Cho hình lập phương có thể tích bằng $2a^3\sqrt{2}$. Tính diện tích một mặt của hình lập phương.

A. $2a^2$. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** a^2. **D.** $2a^2\sqrt{2}$.

Câu 33. Xác định tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x-1) \geq 1$.

A. $[4;+\infty)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Câu 34. Cho $I = \int_1^2 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = x^2+1$, khi đó $I = \int_1^2 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ trở thành biểu thức nào?

A. $I = \int_1^2 t\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$. **B.** $I = \int_2^5 t\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$. **C.** $I = \frac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$. **D.** $I = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Cạnh bên $SA = 4a$ và hợp với đáy một góc bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $V_{S.ABC} = \frac{2a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ABC} = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V_{S.ABC} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 5$. Xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $m \in (1;2)$. **B.** $m \in (5;6)$. **C.** $m \in (4;5)$. **D.** $m \in (3;4)$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;0;6)$. Hãy xác định phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng OA.

A. $x - 3y + 1 = 0$. **B.** $x - 3y - 1 = 0$. **C.** $x - 3z + 20 = 0$. **D.** $x - 3z + 10 = 0$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z - 7 = 0$. Hãy xác định mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (α) trong các mặt phẳng có phương trình sau:

A. $x + y - 2z + 7 = 0$. **B.** $x - y - 2z + 7 = 0$. **C.** $x + y + 7 = 0$. **D.** $x - y + 7 = 0$.

Câu 39. Có bao nhiêu cặp số $(a;d)$ với a, d là các số nguyên sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+24}{x+d}$ cắt trục hoành và trục tung tại hai điểm phân biệt A, B đồng thời đường thẳng đi qua hai điểm A, B đi qua giao hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+24}{x+d}$.

A. 32. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 24.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết rằng khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{3}$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $V=\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị $m\in\mathbb{Z}$ để hàm số $g(x)=\left|\dfrac{2x-m}{x+2}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;5]$ tại điểm $x=a\in(-1;5)$.

A. 7. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 5.

Câu 42. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f(x^2)+f(m-x^2)$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(0;5)$, với $f(x)=x^6-x^4+x^2+x$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 12. **D.** 49.

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)+x=\int\limits_0^2 (f(x)-x)\mathrm{d}x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Xác định giá trị m để $\int\limits_0^2 (mx+f(x))\mathrm{d}x=0$.

A. $m=0$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-3$.

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $F(x)=\int (f(x)+m)\mathrm{d}x$ nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

A. $-5\le m\le 1$. **B.** $m\le -5$. **C.** $-1\le m\le 5$. **D.** $m\ge -1$.

Câu 45. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ bán kính $R=5$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+1=0$. Một đường thẳng d đi qua O, song song với (P) cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng AB.

A. 8. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 46. Cho khối nón đỉnh S có thể tích bằng 20π. Gọi A, B, C là các điểm thuộc đường tròn đáy sao cho tam giác ABC vuông cân. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = \dfrac{20\pi}{3}$. **B.** $V_{S.ABC} = \pi$. **C.** $V_{S.ABC} = \dfrac{20}{3}$. **D.** $V_{S.ABC} = 20$.

Câu 47. Gọi x, y là các số thực lớn hơn 1 thoả mãn đẳng thức $1+\log_{2y} x = \log_y x$ và $A = \dfrac{x}{y^3}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó điểm $M(x; y)$ thuộc đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $y = x^3 - 4x^2 + x - 1$. **B.** $y = x^2 - 4x + 1$.

C. $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. **D.** $y = x^4 - 18x^2 + 12$.

Câu 48. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và d là đường thẳng tiếp xúc với (C) tại điểm cực đại. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng d.

A. 6. **B.** 4. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $\dfrac{27}{4}$.

Câu 49. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm O, bán kính $R=2$ và mặt cầu $(S'): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Mặt phẳng (P) thay đổi luôn tiếp xúc với hai mặt cầu (S) và (S'). Biết rằng (P) luôn đi qua điểm $M(a; b; c)$ cố định. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$.

A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** -2.

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) - 3\ln\left[f(x)+3\right]$. Tìm khẳng định **đúng**?

A. $m \in \left(-\dfrac{10}{3}; -3\right)$. **B.** $m \in \left(-3; -\dfrac{8}{3}\right)$. **C.** $m \le -\dfrac{10}{3}$. **D.** $m \ge -\dfrac{8}{3}$.

HẾT

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Ghi chú: Câu 35 và Câu 42 có thay đổi so với đề gốc !

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm có 4 trang)

KÌ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2023

Bài thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Mã đề: 012

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

Câu 1. Xác định số điểm cực trị của hàm số $y = x^4 - 10x^2 + 1$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 20x$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 20x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{array}\right.$ (3 nghiệm phân biệt) nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Cách 2: Ta có $a = 1$ và $b = -10 \Rightarrow ab = -10 < 0$ nên hàm số có 3 điểm cực trị.

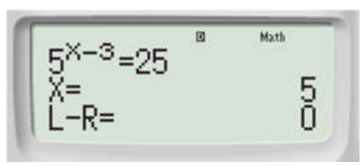
Câu 2. Xác định nghiệm của phương trình $5^{x-3} = 25$.

A. $x = 3$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 5$. **D.** $x = 4$.

Lời giải

Ta có $5^{x-3} = 25 \Leftrightarrow 5^{x-3} = 5^2 \Leftrightarrow x - 3 = 2 \Leftrightarrow x = 5$.

Cách 2: Ta có $5^{x-3} = 25 \xleftrightarrow[\text{SHIFT SOLVE}]{} x = 5$. (xem hình minh hoạ)



Câu 3. Tính thể tích của khối trụ tròn xoay có bán kính đáy r và chiều cao h.

A. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. **B.** $\pi r^2 h$. **C.** $2\pi rh$. **D.** $\frac{4}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải

Thể tích khối trụ tính bởi công thức $V = B.h = \pi r^2.h$.

Câu 4. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\int 4x^3 \mathrm{d}x = 4x^4 + C$. **B.** $\int 4x^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + C$. **C.** $\int 4x^3 \mathrm{d}x = 12x^2 + C$. **D.** $\int 4x^3 \mathrm{d}x = x^4 + C$.

Lời giải

Theo định nghĩa nguyên hàm ta có $\int 4x^3 \mathrm{d}x = 4.\int x^3 \mathrm{d}x = 4.\frac{x^4}{4} + C = x^4 + C$.

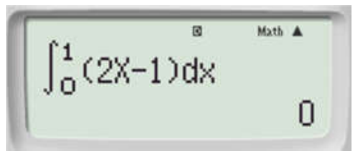
Câu 5. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 (2x-1)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=3$. **C.** $I=0$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Ta có $I=\int\limits_0^1 (2x-1)\mathrm{d}x=\left(x^2-x\right)\Big|_0^1=\left(1^2-1\right)-\left(0^2-0\right)=0$.

Cách 2: Bấm máy tính ta có $\int\limits_0^1 (2x-1)\mathrm{d}x=1$. (xem hình minh hoạ)



Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-3;2)$ và $B(2;1;1)$. Hãy xác định toạ độ vectơ $\overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{AB}=(1;2;1)$. **B.** $\overrightarrow{AB}=(1;-4;-1)$. **C.** $\overrightarrow{AB}=(1;4;1)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=(1;4;-1)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2-1;1-(-3);1-2)=(1;4;-1)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Khi đó hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải

Ta có $y'>0$ khi $x\in(-1;2)$. Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 8. Rút gọn biểu thức $Q=b^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{b}$ với $b>0$ ta được

A. $Q=b^4$. **B.** $Q=b^2$. **C.** $Q=b$. **D.** $Q=b^3$.

Lời giải

Ta có $Q=b^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{b}=b^{\frac{4}{3}}:b^{\frac{1}{3}}=b^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}=b^1=b$.

Câu 9. Biết $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_1^2 g(x)\mathrm{d}x=3$. Tính giá trị của $\int\limits_1^2 \left[f(x)-2g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. -4. **B.** -1. **C.** 8. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\int\limits_1^2 \left[f(x)-2g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x-2.\int\limits_1^2 g(x)\mathrm{d}x=2-2.3=-4$.

Câu 10. Xác định giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+x$ trên $[0;2]$.

A. 0. **B.** -2. **C.** 10. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2+1$, khi đó $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2+1=0\ (VN)$.

Lại có $y(0)=0$ và $y(2)=10$ nên suy ra $\min\limits_{[0;\,2]} y=y(0)=0$.

Cách 2: Bấm máy tính *TABLE* với $\boxed{Start:0} \to \boxed{End:2} \to \boxed{Step:\dfrac{2-0}{20}=0{,}1}$.

Ta có $\min\limits_{[0;\,2]} y=y(0)=0$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, xác định toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của $A(1;-1;4)$ lên mặt phẳng (Oyz).

A. $H(1;0;0)$. **B.** $H(1;0;4)$. **C.** $H(0;-1;0)$. **D.** $H(0;-1;4)$.

Lời giải

Hình chiếu lên mặt phẳng (Oyz) sẽ giữ lại toạ độ y và z đồng thời cho toạ độ x bằng 0.

Áp dụng ta có hình chiếu vuông góc của $A(1;-1;4)$ lên mặt phẳng (Oyz) là $H(0;-1;4)$.

Câu 12. Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh bằng a và chiều cao bằng $4a$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

A. $\dfrac{16}{3}a^3$. **B.** $\dfrac{4}{3}a^3$. **C.** $16a^3$. **D.** $4a^3$.

Lời giải

Diện tích đáy là $B=a^2$.

Thể tích khối lăng trụ là $V=B.h=a^2.4a=4a^3$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Xác định giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$.

A. $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=3$ và giá trị cực đại là $\boxed{y_{CD}=2}$.

Câu 14. Cho khối chóp có diện tích đáy $B=8a^2$ và chiều cao $h=a$. Tính thể tích khối chóp đã cho.

A. $\frac{4}{3}a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $\frac{8}{3}a^3$.

Lời giải

Thể tích khối chóp là $V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}8a^2.a=\frac{8a^3}{3}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OA}=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$. Xác định toạ độ điểm A.

A. $(-1;1;2)$. **B.** $(-1;1;-2)$. **C.** $(1;-1;2)$. **D.** $(1;-1;-2)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{OA}=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{OA}=(-1;1;2)\Rightarrow A(-1;1;2)$.

Câu 16. Với a là số dương tuỳ ý, khi đó $\log_5 a^3$ bằng

A. $3+\log_5 a$. **B.** $\frac{1}{3}+\log_5 a$. **C.** $3\log_5 a$. **D.** $\frac{1}{3}\log_5 a$.

Lời giải

Theo công thức logarit ta có $\log_5 a^3=3.\log_5 a$.

Câu 17. Xác định toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\frac{3x-2}{x+1}$ với trục tung.

A. $M(-2;0)$. **B.** $M(0;-2)$. **C.** $M\left(0;\frac{2}{3}\right)$. **D.** $M\left(\frac{2}{3};0\right)$.

Lời giải

Giao điểm với trục tung Oy (có phương trình $x=0$) nên ta có $x=0\Rightarrow y=-2\Rightarrow M(0;-2)$.

Câu 18. Xác định toạ độ tâm của mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=12$.

A. $I(-2;2;12)$. **B.** $I(1;-2;0)$. **C.** $I(1;-2;-12)$. **D.** $I(-1;2;0)$.

Lời giải

Mặt cầu $(S):\underbrace{(x-a)}_{=0}{}^2+\underbrace{(y-b)}_{=0}{}^2+\underbrace{(z-c)}_{=0}{}^2=R^2$ có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.

Áp dụng với $(S):\underbrace{(x-1)}_{=0}{}^2+\underbrace{(y+2)}_{=0}{}^2+\underbrace{z}_{=0}{}^2=12$ ta có tâm $I(1;-2;0)$.

Câu 19. Cho $F(x)=\int(e^x-1)\mathrm{d}x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

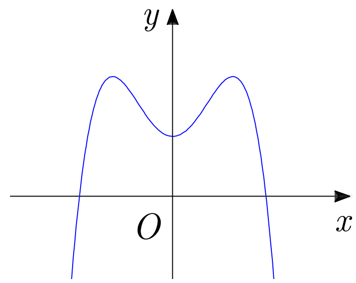
A. $F(x)=e^x+x+C$. **B.** $F(x)=e^x-x+C$.

C. $F(x)=e^x+C$. **D.** $F(x)=-e^x+x+C$.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int(e^x-1)\mathrm{d}x=\int e^x\mathrm{d}x-\int 1\mathrm{d}x=e^x-x+C$.

Câu 20. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình sau?



A. $y = x^2 - 3x + 1$. **B.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **C.** $y = -x^3 + 3x + 1$. **D.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải

Hàm số có dạng bậc 4 nên loại A và C.

Dựa vào hình dạng đồ thị ta thấy $a < 0$ nên loại D. Do đó chọn B.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 4 = 0$. Hãy xác định giao điểm của mặt phẳng (P) và trục Oz.

A. $M(0;0;-4)$. **B.** $M(0;0;4)$. **C.** $M(2;0;0)$. **D.** $M(-2;0;0)$.

Lời giải

Ta có giao với trục $Oz \Rightarrow x = y = 0$.

Thay $x = y = 0$ vào phương trình của (P) ta được $2.0 - 0 - z - 4 = 0 \Leftrightarrow z = -4$.

Suy ra giao điểm của (P) và trục Oz là điểm $M(0;0;-4)$.

Câu 22. Xác định tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

A. $y = 2$. **B.** $y = -\dfrac{1}{2}$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ là đường thẳng $cx + d = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{d}{c}$.

Áp dụng với hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$ ta có tiệm cận đứng là $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. (mẫu số bằng 0)

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, hãy xác định toạ độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có phương trình $3x - y - z + 2 = 0$.

A. $\vec{n} = (-1;-1;2)$. **B.** $\vec{n} = (3;-1;-1)$. **C.** $\vec{n} = (3;1;1)$. **D.** $\vec{n} = (3;-1;2)$.

Lời giải

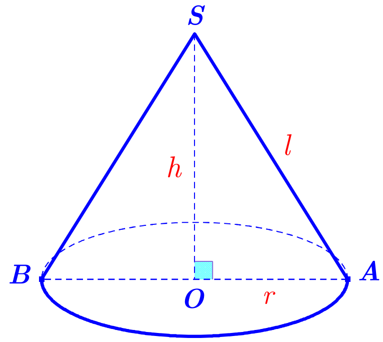
Mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có một VTPT là $\vec{n} = (A;\, B;\, C)$.

Áp dụng với đề bài cho ta có $\vec{n} = (3;\, -1;\, -1)$. (hệ số của $x,\ y,\ z$)

Câu 24. Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4. Xác định độ dài đường sinh của hình nón (N).

A. 5. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 1. **D.** 12.

Lời giải



Độ dài đường sinh của hình nón được tính bởi công thức $l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Xác định số nghiệm của phương trình $f(x)=1$.

A. 0 . **B.** 2 . **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$
									$y=1$

Kẻ đường thẳng $y=1$ (hình vẽ ở trên) ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=1$ có 3 điểm chung nên suy ra phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm.

Câu 26. Xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-2x^2+mx-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\le\frac{2}{3}$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m\ge\frac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-4x+m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 3x^2-4x+m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\\ 2^2-3.m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge\frac{4}{3}$.

Câu 27. Trên khoảng $(0;+\infty)$, xác định đạo hàm của hàm số $y=\log x$.

A. $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{10\ln x}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{x}$. **D.** $y'=\dfrac{\ln 10}{x}$.

Lời giải

Ta có $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, áp dụng với $a=10$ ta có $y'=(\log x)'=\dfrac{1}{x\ln 10}$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-z+1=0$. Điểm nào trong các điểm sau thuộc mặt phẳng (P)?

A. $M(1;7;3)$. **B.** $M(0;-3;0)$. **C.** $M(0;3;2)$. **D.** $M(1;3;0)$.

Lời giải

Nhập vào máy tính biểu thức $\boxed{2X-Z+1}$ sau đó dùng lệnh CALC để thử các đáp án.

Từ đó suy ra điểm $M(1;7;3)\in(P)$.

Câu 29. Tính giá trị của biểu thức 2^{2x+1} biết rằng $2^x=5$.

A. 10. **B.** 11. **C.** 50. **D.** 25.

Lời giải

Ta có $2^{2x+1}=2^{2x}.2^1=(2^x)^2.2=5^2.2=50$.

Cách 2: Dùng lệnh SHIFT SOLVE giải phương trình $2^x=5$.

Sau đó nhập tiếp $\boxed{2^{2x+1}}\rightarrow\boxed{=}$, kết quả thu được laf 50.

Câu 30. Tìm tập xác định D của hàm số $y=(x-1)^{-3}$.

A. $D=(1;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$. **C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=(-\infty;1)$.

Lời giải

Điều kiện xác định (mũ nguyên âm) là $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$.

Suy ra tập xác định là $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Câu 31. Xác định công thức tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{2x+1}$, $y=0$; $x=0$, $x=4$ khi quay quanh trục Ox.

A. $V=\pi\int\limits_0^4\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int\limits_0^4(2x+1)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_0^4(2x+1)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int\limits_0^4\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$; $x=a$, $x=b\ (b>a)$ khi quay quanh trục Ox là $V=\pi\int\limits_a^b[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Áp dụng vào bài toán này ta có $V=\pi\int\limits_0^4\left(\sqrt{2x+1}\right)^2\mathrm{d}x=V=\pi\int\limits_0^4(2x+1)\mathrm{d}x$.

Câu 32. Cho hình lập phương có thể tích bằng $2a^3\sqrt{2}$. Tính diện tích một mặt của hình lập phương.

A. $2a^2$. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** a^2. **D.** $2a^2\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi x là độ dài cạnh của hình lập phương.

Khi đó thể tích của khối lập phương là $x^3 = 2a^3\sqrt{2} = \left(a\sqrt{2}\right)^3 \Rightarrow x = a\sqrt{2}$.

Suy ra diện tích một mặt của khối lập phương là $S = x^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 2a^2$.

Câu 33. Xác định tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x-1) \geq 1$.

A. $[4;+\infty)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Lời giải

Điều kiện: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

Ta có $\log_3(x-1) \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 3^1 \Leftrightarrow x \geq 4$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [4;+\infty)$.

Câu 34. Cho $I = \int\limits_1^2 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = x^2+1$, khi đó $I = \int\limits_1^2 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ trở thành biểu thức nào?

A. $I = \int\limits_1^2 t\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$. **B.** $I = \int\limits_2^5 t\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$. **C.** $I = \frac{1}{2}\int\limits_2^5 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$. **D.** $I = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

Lời giải

Đặt $t = x^2+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}$.

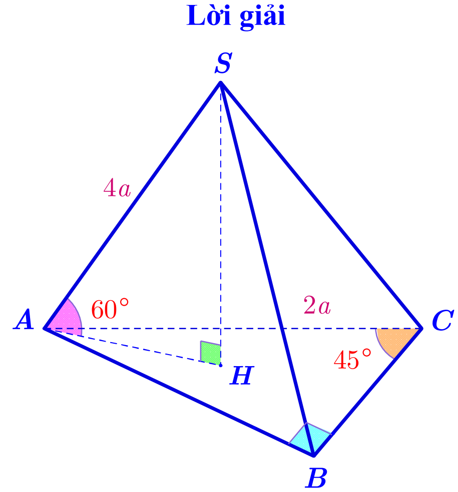
Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t = 1^2+1 = 2$ và $x = 2 \Rightarrow t = 2^2+1 = 5$.

Lúc đó ta có $I = \int\limits_1^2 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \sqrt{x^2+1}.x\mathrm{d}x = \int\limits_2^5 \sqrt{t}.\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int\limits_2^5 \sqrt{t}.\mathrm{d}t$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Cạnh bên $SA = 4a$ và hợp với đáy một góc bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $V_{S.ABC} = \frac{2a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ABC} = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V_{S.ABC} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Xét ΔABC vuông cân tại B ta có $\sin 45^\circ = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC.\sin 45^\circ = 2a.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích đáy là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.BA.BC = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2} = a^2$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC).

Lúc đó ta có $(SA,(ABC)) = (SA,HA) = \widehat{SAH} = 60^\circ$. (xem hình vẽ minh hoạ)

Xét tam giác SHA vuông tại H ta có $\sin 60^\circ = \dfrac{SH}{SA} \Rightarrow SH = SA.\sin 60^\circ = 4a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.a^2.2a\sqrt{3} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 5$. Xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

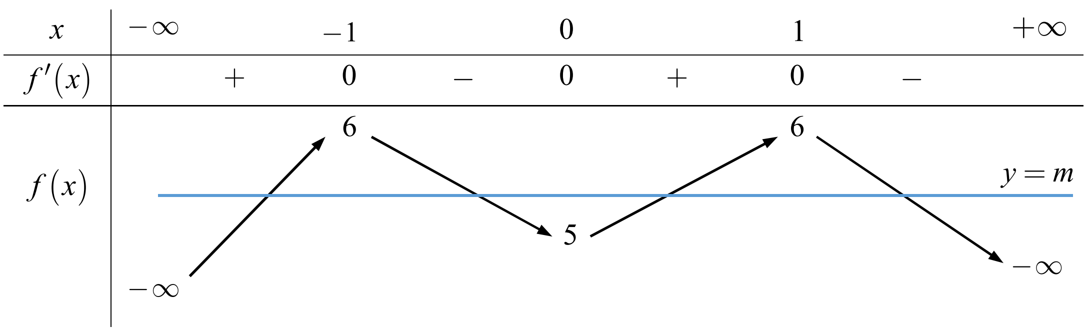
A. $m \in (1;2)$. **B.** $m \in (5;6)$. **C.** $m \in (4;5)$. **D.** $m \in (3;4)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = -4x^3 + 4x$.

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 5 < m < 6$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;0;6)$. Hãy xác định phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng OA.

A. $x - 3y + 1 = 0$. **B.** $x - 3y - 1 = 0$. **C.** $x - 3z + 20 = 0$. **D.** $x - 3z + 10 = 0$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng OA. Khi đó ta có $M(-1;0;3)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng OA đi qua điểm $M(-1;0;3)$ và vuông góc với OA nên nhận $OA = (-2;0;6) = -2(1;0;-3)$ làm vectơ pháp tuyến, do đó có phương trình là

$1(x+1) + 0(y-0) - 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow x - 3z + 10 = 0$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x-y+2z-7=0$. Hãy xác định mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (α) trong các mặt phẳng có phương trình sau:

A. $x+y-2z+7=0$. **B.** $x-y-2z+7=0$. **C.** $x+y+7=0$. **D.** $x-y+7=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;-1;2)$.

Xét phương án A có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;1;-2)\Rightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_\alpha}=1.1+1.(-1)-2.2=-4\neq 0$ nên suy ra $(P)\not\perp(\alpha)$.

Xét phương án B có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;-2)\Rightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_\alpha}=1.1+(-1).(-1)-2.2=-2\neq 0$ nên suy ra $(P)\not\perp(\alpha)$.

Xét phương án C có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;1;0)\Rightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_\alpha}=1.1+1.(-1)+0.2=0$ nên suy ra $(P)\perp(\alpha)$. Vậy chọn đáp án C.

Câu 39. Có bao nhiêu cặp số $(a;d)$ với a, d là các số nguyên sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+24}{x+d}$ cắt trục hoành và trục tung tại hai điểm phân biệt A, B đồng thời đường thẳng đi qua hai điểm A, B đi qua giao hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+24}{x+d}$.

A. 32. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 24.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận $\Leftrightarrow ad-bc\neq 0\Leftrightarrow ad-24\neq 0\Leftrightarrow ad\neq 24$.

Lúc đó tiệm cận đứng là $x+d=0\Leftrightarrow x=-d$ và tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{1}\Leftrightarrow y=a$.

Suy ra giao điểm của 2 đường tiệm cận là $I(-d;a)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành $(y=0)$ là $A\left(-\dfrac{24}{a};0\right)$, với $a\neq 0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số và trục tung $(x=0)$ là $B\left(0;\dfrac{24}{d}\right)$, với $d\neq 0$.

Phương trình đoạn chắn đi qua 2 điểm AB là $\dfrac{x}{-\dfrac{24}{a}}+\dfrac{y}{\dfrac{24}{d}}=1\Leftrightarrow -\dfrac{ax}{24}+\dfrac{dy}{24}=1\Leftrightarrow -ax+dy-24=0$

Đường thẳng AB đi qua điểm $I(-d;a)\Leftrightarrow -a(-d)+d.a-24=0\Leftrightarrow ad=12$. (thoả mãn)

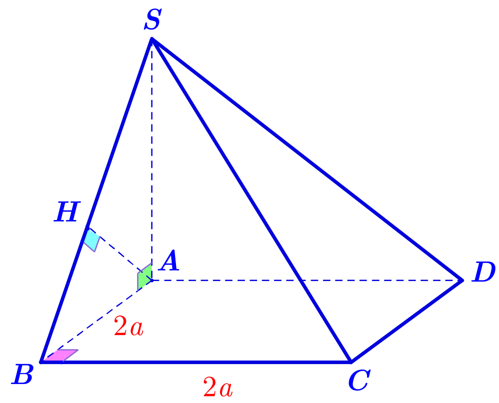
Do $(a;d)$ nguyên nên suy ra số cặp $(a;d)$ thoả mãn $ad=12$ bằng số ước của 12 (tương ứng mỗi a là ước của 12 ta tìm được $d=\dfrac{12}{a}$).

Mặt khác, số 12 có 12 ước nguyên là ±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±12 nên suy ra có 12 cặp số nguyên $(a;d)$ thoả mãn đề bài.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết rằng khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{3}$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $V=\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải



Diện tích đáy $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$.

Ta có $\begin{cases} AD \,//\, BC \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AD \,//\, (SBC)$. Suy ra $d(D,(SBC)) = d(A,(SBC)) = AH = a\sqrt{3}$. (theo đề)

Trong đó, H là hình chiếu từ A lên SB nên $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \ (\text{do } BC \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$, suy ra

H là hình chiếu vuông góc từ A lên (SBC).

Xét tam giác SAB vuông tại A và AH là đường cao, ta có

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AS^2} \Rightarrow \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{AS^2} \Rightarrow AS = 2a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.4a^2.2a\sqrt{3} = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $g(x) = \left|\frac{2x-m}{x+2}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;5]$ tại điểm $x = a \in (-1;5)$.

A. 7. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 5.

Lời giải

Xét $f(x) = \frac{2x-m}{x+2}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, nên hàm số xác định trên $[-1;5]$.

Ta có $f'(x) = \frac{ad-bc}{(x+2)^2} = \frac{4+m}{(x+2)^2}$.

TH1: $m+4=0 \Leftrightarrow m=-4$ ta có $f(x) = \frac{2x+4}{x+2} = 2$, với mọi $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

Khi đó $g(x) = |f(x)| = 2$, với mọi $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ nên suy ra hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 trên $[-1;5]$ tại mọi điểm $x = a \in (-1;5)$, do đó $m=-4$ thoả mãn ycbt. (1)

TH2: $m+4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$ ta có $f(x)$ là hàm đơn điệu (hoặc là tăng hoặc là giảm trên các khoảng xác định).

Do đó hàm số $g(x)=|f(x)|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;5]$ tại điểm $x=a\in(-1;5)$ khi và chỉ khi phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $a\in(-1;5)$.

Lại có $f(x)=0\Leftrightarrow 2x-m=0\Leftrightarrow x=\dfrac{m}{2}$ nên theo đề ta có $-1<\dfrac{m}{2}<5\Leftrightarrow -2<m<10$.

Do m nguyên nên $m\in\{-1;\,0;\,1;...;\,8;\,9\}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra có tất cả 12 giá trị m thoả mãn đề bài.

Lưu ý: Đáp án đề xuất là 11 giá trị m chưa đúng !

Câu 42. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f(x^2)+f(m-x^2)$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(0;5)$, với $f(x)=x^6-x^4+x^2+x$?

A. 6. **B.** 7. **C.** 12. **D.** 13.

Lời giải

Xét $y=\underbrace{f(x^2)+f(m-x^2)}_{h(x)}$, ta có $y'=2x.f'(x^2)-2x.f'(m-x^2)=2x\left[f'(x^2)-f'(m-x^2)\right]$.

Lúc đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=0\\ f'(x^2)-f'(m-x^2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'(x^2)=f'(m-x^2)\end{array}\right.$ (1)

Mặt khác, xét $f(x)=x^6-x^4+x^2+x$, ta có $f'(x)=6x^5-4x^3+2x+1\Rightarrow f''(x)=30x^4-12x^2+2$

Nhận thấy rằng $f''(x)=0$ vô nghiệm và $a=30>0$ nên $f''(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Suy ra $f'(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $x^2=m-x^2\Leftrightarrow 2x^2=m\Leftrightarrow x^2=\dfrac{m}{2}$. (3)

TH1: Nếu $m<0$ thì phương trình (3) vô nghiệm nên $h'(x)=0$ có nghiệm duy nhất là $x=0$ nên $x=0$ là cực trị duy nhất của hàm số $y=h(x)$. Do $x=0\in(0;5)$ nên TH này không thoả mãn.

TH2: Nếu $m=0$ thì phương trình (3) có nghiệm kép $x=0$ nên $h'(x)=0$ có nghiệm duy nhất là $x=0$ (bội 3) nên $x=0$ là cực trị duy nhất của hàm số $y=h(x)$. Do $x=0\in(0;5)$ nên TH này không thoả mãn.

TH3: Nếu $m>0$ thì phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt là $x_1=-\sqrt{\dfrac{m}{2}}<0$ và $x_2=\sqrt{\dfrac{m}{2}}>0$. Khi đó phương trình $h'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là $x=0$, $x=x_1$ và $x=x_2$ nên hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị là $x=0$, $x=x_1$ và $x=x_2$.

Do đó, hàm số có cực trị thuộc $(0;5)\Leftrightarrow x_2\in(0;5)\Leftrightarrow 0<\sqrt{\dfrac{m}{2}}<5\Leftrightarrow 0<\dfrac{m}{2}<25\Leftrightarrow 0<m<50$.

Lại có m nguyên nên $m\in\{1;2;3;...;49\}$. Vậy có 49 giá trị m thoả mãn đề bài.

Lưu ý: Với các phương án đề bài cho thì không có đáp án đúng!

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)+x=\int\limits_0^2[f(x)-x]\mathrm{d}x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Xác định giá trị m để $\int\limits_0^2[mx+f(x)]\mathrm{d}x=0$.

A. $m=0$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Theo đề ta có $f(x)+x=\int\limits_0^2[f(x)-x]\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x}_{k}-\int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x=k-2\ (1)$, với k là hằng số.

Suy ra $f(x)=-x+k-2$.

Mặt khác, lấy tích phân cận từ 0 tới 2 hai vế của (1) ta được

$$\underbrace{\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x}_{k}+\underbrace{\int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x}_{=2}=\int\limits_0^2(k-2)\mathrm{d}x\Rightarrow k+2=2(k-2)\Rightarrow k=6.$$

Suy ra $f(x)=-x+4$, thử lại thấy thoả mãn $f(x)+x=\int\limits_0^2[f(x)-x]\mathrm{d}x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Theo đề $\int\limits_0^2[mx+f(x)]\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow m\underbrace{\int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x}_{=2}+\underbrace{\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x}_{k=6}=0\Leftrightarrow 2m+6=0\Leftrightarrow m=-3$.

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $F(x)=\int[f(x)+m]\mathrm{d}x$ nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

A. $-5\le m\le 1$. **B.** $m\le -5$. **C.** $-1\le m\le 5$. **D.** $m\ge -1$.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int[f(x)+m]\mathrm{d}x\Rightarrow F'(x)=f(x)+m$.

Do đó hàm số $F(x)$ nghịch biến trên $(0;3)\Leftrightarrow F'(x)\le 0,\ \forall x\in(0;3)\Leftrightarrow f(x)+m\le 0,\ \forall x\in(0;3)$.

$\Leftrightarrow \max\limits_{x\in[0;3]}(f(x)+m)\le 0\Leftrightarrow m+5\le 0\Leftrightarrow m\le -5$.

Lưu ý: Ta có bảng biến thiên của $f(x)+m$ trên $[0;3]$ như sau:

x	0		3
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)+m$	$-1+m$	$\nearrow$	$5+m$

Câu 45. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ bán kính $R=5$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+1=0$. Một đường thẳng d đi qua O, song song với (P) cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng AB.

A. 8. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

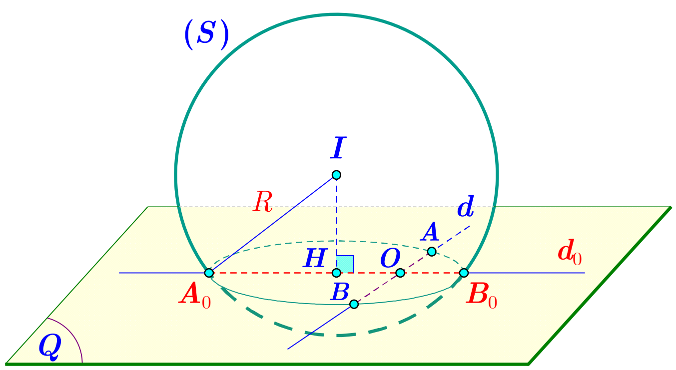
Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua điểm O và song song với (P). Khi đó (Q) có phương trình là $x+2y-2z=0$.

Theo đề ta có d đi qua O, song song với (P) nên $d\subset(Q)$.

Tính được $d(I,(Q))=\dfrac{|1+2.(-2)-2.3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3<R$ nên (Q) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn tâm H và bán kính bằng 3, với H là hình chiếu của I lên (Q).

Lại có $\overrightarrow{OI}=(1;-2;3)\Rightarrow OI=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}<R$ nên O nằm trong mặt cầu (S).

Từ các dữ kiện trên ta có hình vẽ minh hoạ

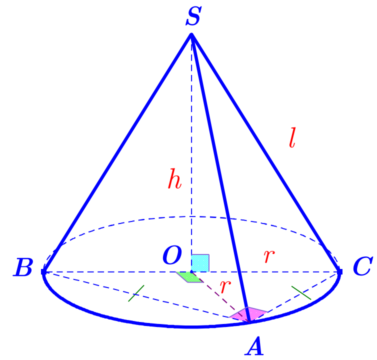


Ta có d đi qua O và cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B và $AB_{\max}$ khi $d\equiv d_0\equiv OH$ và khi đó $AB_{\max}=A_0B_0=2.A_0H=2\sqrt{R^2-IH^2}=2\sqrt{5^2-3^2}=8$.

Câu 46. Cho khối nón đỉnh S có thể tích bằng 20π. Gọi A, B, C là các điểm thuộc đường tròn đáy sao cho tam giác ABC vuông cân. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC}=\dfrac{20\pi}{3}$. **B.** $V_{S.ABC}=\pi$. **C.** $V_{S.ABC}=\dfrac{20}{3}$. **D.** $V_{S.ABC}=20$.

Lời giải



Không mất tính tổng quát ta giả sử tam giác ABC vuông cân tại A. Khi đó BC là đường kính đáy.

Theo đề ta có thể tích khối nón là $V_{no'n} = 20\pi \Rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 h = 20\pi \Rightarrow r^2 h = 60$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SO = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}BC.AO\right).SO = \frac{1}{6}.2r.r.h = \frac{1}{3}r^2 h = 20$.

Câu 47. Gọi x, y là các số thực lớn hơn 1 thoả mãn đẳng thức $1+\log_{2y} x = \log_y x$ và $A = \frac{x}{y^3}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó điểm $M(x;y)$ thuộc đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $y = x^3 - 4x^2 + x - 1$. **B.** $y = x^2 - 4x + 1$.

C. $y = \frac{x+2}{x-1}$. **D.** $y = x^4 - 18x^2 + 12$.

Lời giải

Ta có $1+\log_{2y} x = \log_y x \Leftrightarrow 1 + \frac{\log_2 x}{\log_2(2y)} = \frac{\log_2 x}{\log_2 y} \Leftrightarrow 1 + \frac{\log_2 x}{1+\log_2 y} = \frac{\log_2 x}{\log_2 y}$.

$\Leftrightarrow \log_2 y(1+\log_2 y) + \log_2 x.\log_2 y = \log_2 x(1+\log_2 y)$

$\Leftrightarrow \log_2 y + (\log_2 y)^2 + \log_2 x.\log_2 y = \log_2 x + \log_2 x.\log_2 y \Leftrightarrow \log_2 y + (\log_2 y)^2 = \log_2 x$

Đặt $t = \log_2 y$, suy ra $\log_2 x = t^2 + t$.

Khi đó ta có

$A = \frac{x}{y^3} \Rightarrow \log_2 A = \log_2 x - \log_2 y^3 = \log_2 x - 3\log_2 y = t^2 + t - 3t = t^2 - 2t = (t-1)^2 - 1 \geq -1$.

Suy ra $A \geq 2^{-1} = \frac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Do đó $A_{\min} = \frac{1}{2}$ khi $t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2^{t^2+t} = 2^2 = 4 \\ y = 2^t = 2 \end{cases}$. Suy ra $M(4;2)$.

Dễ thấy $M(4;2)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$.

Câu 48. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và d là đường thẳng tiếp xúc với (C) tại điểm cực đại. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng d.

A. 6. **B.** 4. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{27}{4}$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = -3 \end{array}\right.$.

Dễ thấy rằng điểm cực đại của hàm số là $A(0;1)$.

Đường thẳng d tiếp xúc với (C) tại điểm cực đại $A(0;1)$ có phương trình là $y = 1$. (đi qua điểm A và song song hoặc trùng với trục Ox).

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $x^3 - 3x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và d là

$$S = \int_0^3 \left|\left(x^3 - 3x^2 + 1\right) - 1\right| \mathrm{d}x = \int_0^3 \left(3x^2 - x^3\right) \mathrm{d}x = \frac{27}{4}.$$

Câu 49. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm O, bán kính $R = 2$ và mặt cầu $(S'): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Mặt phẳng (P) thay đổi luôn tiếp xúc với hai mặt cầu (S) và (S'). Biết rằng (P) luôn đi qua điểm $M(a;b;c)$ cố định. Tính giá trị của biểu thức $a + b + c$.

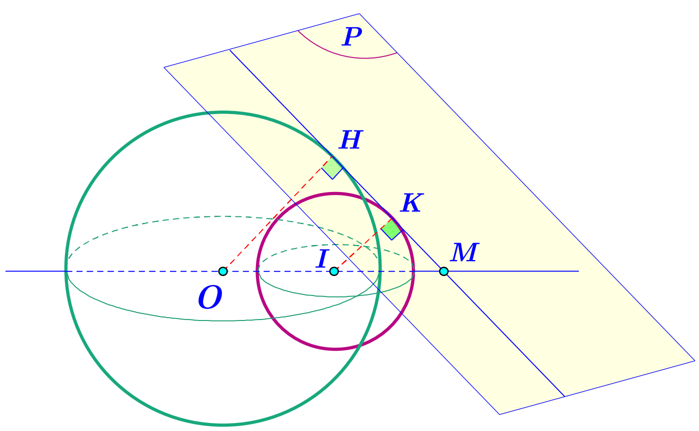
A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** -2.

Lời giải

Mặt cầu (S') có tâm $I(1;0;1)$ và bán kính $r = 1$.

Ta có $\overrightarrow{OI} = (1;0;1) \Rightarrow OI = \sqrt{2}$.

Từ đó ta có hình vẽ mô tả vị trí tương đối của (S) và (S') như sau:



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của O và I lên (P) và $M = OI \cap (P)$.

Khi đó ta có H, K, M thẳng hàng.

Xét hai tam giác đồng dạng ΔOHM và ΔIKM ta có $\frac{MI}{MO} = \frac{IK}{OH} = \frac{r}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow MI = \frac{1}{2}MO$

$\Rightarrow M$ đối xứng với O qua I nên M cố định.

Đồng thời ta có I là trung điểm OM nên $M(2;0;2) \Rightarrow a = 2, b = 0, c = 2 \Rightarrow a + b + c = 4$.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)-3\ln\left[f(x)+3\right]$. Tìm khẳng định **đúng**?

A. $m\in\left(-\dfrac{10}{3};-3\right)$. **B.** $m\in\left(-3;-\dfrac{8}{3}\right)$. **C.** $m\le-\dfrac{10}{3}$. **D.** $m\ge-\dfrac{8}{3}$.

Lời giải

Do $f(x)\ge-2,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=f'(x)-3.\dfrac{\left[f(x)+3\right]'}{f(x)+3}=f'(x)-\dfrac{3f'(x)}{f(x)+3}=\dfrac{f'(x).f(x)}{f(x)+3}$.

Lúc đó ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=1\end{array}\right.\\ f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a<-1\\x=b>1\end{array}\right.\end{array}\right.$. (nghiệm của phương trình $f(x)=0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=0$)

x	$-\infty$	a		-1		0		1		b	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$+\infty$	↘		-2	↗	-1	↘	-2	↗		$+\infty$
											$y=0$

Nhận thấy rằng các nghiệm của $g'(x)$ đều là các nghiệm bội lẻ nên ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		a		-1		0		1		b		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Nhận thấy rằng $g(x)$ chỉ có thể đạt giá trị nhỏ nhất tại các điểm $x=a$, $x=0$ hoặc $x=b$.

Lại có $g(a)=f(a)-3\ln\left[f(a)+3\right]=0-3\ln(0+3)=-3\ln3\simeq-3,296$.

$g(b)=f(b)-3\ln\left[f(b)+3\right]=0-3\ln(0+3)=-3\ln3\simeq-3,296$.

và $g(0)=f(0)-3\ln[f(0)+3]=-1-3\ln(-1+3)=-1-3\ln 2\simeq -3,079$.

Vậy $\min g(x)=-3\ln 3\simeq -3,296\in\left(-\dfrac{10}{3};-3\right)$.

CHÚC CÁC EM ÔN TẬP VÀ THI TỐT !