TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

(Đề thi gồm 06 trang)

ĐỀ THI KSCL THEO ĐỊNH HƯỚNG THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ XÉT TUYỂN ĐẠI HỌC NĂM 2020 - LẦN 2

Bài thi: Môn Toán

Thời gian làm bài: 90 phút;
(50 câu trắc nghiệm)

Mã đề thi 209

Họ và tên thí sinh:... Số báo danh: ....

Câu 1: Cho khối cầu có bán kính $R=2$. Thể tích khối cầu đã cho bằng

A. 32π. **B.** $\dfrac{32\pi}{3}$. **C.** 16π. **D.** $\dfrac{16\pi}{3}$.

Câu 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{4a^3}{3}$. **B.** $2a^3$. **C.** a^3. **D.** $\dfrac{2a^3}{3}$.

Câu 3: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1$, $AD=2$, $AA'=3$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 4: Đạo hàm của hàm số $y=\log_3(1-2x)$ là

A. $y'=\dfrac{-2}{(1-2x)\ln 3}$. **B.** $y'=\dfrac{-2\ln 3}{1-2x}$. **C.** $y'=\dfrac{2}{(1-2x)\ln 3}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{(1-2x)\ln 3}$.

Câu 5: Cho $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\displaystyle\int_2^3 2f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính $I=\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. **B.** $I=\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=2$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+3z+2=0$ và đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P). Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

A. $\overrightarrow{u_2}(1;-2;2)$. **B.** $\overrightarrow{u_4}(1;2;3)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}(0;-2;3)$. **D.** $\overrightarrow{u_1}(1;-2;3)$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực đại ?

x	$-\infty$		0		1		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$+$	

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 8: Một đội văn nghệ có 5 bạn nam và 3 bạn nữ. Có bao nhiêu cách chọn 2 bạn gồm 1 nam và 1 nữ để thể hiện một tiết mục song ca ?

A. $C_5^1.C_3^1$. **B.** A_8^2. **C.** C_8^2. **D.** $C_5^1+C_3^1$.

Câu 9: Cho các số phức $z_1=1-i$, $z_2=-2+3i$. Tìm phần ảo của số phức $z=z_1-z_2$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** -4.

Câu 10: Cho số phức z tuỳ ý. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $z^2=|z|^2$. **B.** $z.\overline{z}=|z|^2$. **C.** $|z|=|-z|$. **D.** $|z|=|\overline{z}|$.

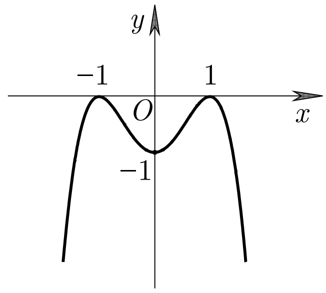
Câu 11: Đồ thị của hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang ?

A. $y = \dfrac{1}{2x^2 + x}$. **B.** $y = e^x$. **C.** $y = 2x^2 + x$. **D.** $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$.

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(1-2x) \geq \log_2 3$ là

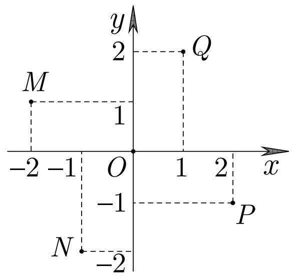
A. $\left(-\infty; -1\right]$. **B.** $\left[-1; \dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right]$. **D.** $\left(-\infty; -1\right)$.

Câu 13: Hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây ?



A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
B. $y = -x^4 - 2x^2 - 1$.
C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
D. $y = x^3 - x^2 + x - 1$.

Câu 14: Cho số phức $z = 1 - 2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $z' = -\overline{z}$.



A. M.
B. N.
C. P.
D. Q.

Câu 15: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = 2^x$. **B.** $y = \log_2 x$. **C.** $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. **D.** $y = e^{-x}$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 3$ là

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	3	↘	1	↗	3

A. 1. **B.** 3.
C. 4. **D.** 2.

Câu 17: Cho khối trụ có chiều cao $h = 8$ và bán kính đáy $r = 3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 72π. **B.** 24π. **C.** 48π. **D.** 96π.

Câu 18: Cho hình nón có đường sinh $l = 6$ và bán kính đáy $r = 2$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 72π. **B.** 24π. **C.** 8π. **D.** 12π.

Câu 19: Cho phương trình $4^x - 3.2^{x+1} + 2 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được phương trình nào sau đây ?

A. $t^2 - 6t + 2 = 0$. **B.** $2t^2 - 3t + 2 = 0$. **C.** $t^2 - 3t + 2 = 0$. **D.** $t^2 - 3t + 1 = 0$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; -2; 5)$ trên trục Oy có tọa độ là

A. $(0; -2; 5)$. **B.** $(1; 0; 5)$. **C.** $(0; -2; 0)$. **D.** $(1; -2; 0)$.

Câu 21: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là

A. $e^x - \dfrac{x^2}{2} + C$. **B.** $e^x - 2 + C$. **C.** $e^x - x^2 + C$. **D.** $e^x - 2x^2 + C$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

A. $(2; 4)$. **B.** $(1; 2)$.

C. $(1; 3)$. **D.** $(-1; 2)$.

Câu 23: Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Hỏi có bao nhiêu số hạng của cấp số cộng nhỏ hơn 11 ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{u_1}(1; 1; -4)$, $\overrightarrow{u_2}(0; 1; 1)$. Góc giữa hai vectơ đã cho bằng

A. 30^0. **B.** 150^0. **C.** 60^0. **D.** 120^0.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 11 = 0$. Bán kính của (S) bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{67}$. **C.** $\sqrt{45}$. **D.** 5.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -1; 5)$, $N(3; 1; 1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN có phương trình là

A. $2x + y - 4z + 10 = 0$. **B.** $x + y + 2z - 8 = 0$.

C. $x + y - 2z + 4 = 0$. **D.** $x - y + 2z - 8 = 0$.

Câu 27: Cho các số thực a, b thoả mãn $\dfrac{2a-1}{b-2} = \log_2 3$. Giá trị của $\dfrac{3^b}{4^a}$ bằng

A. $\dfrac{2}{9}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

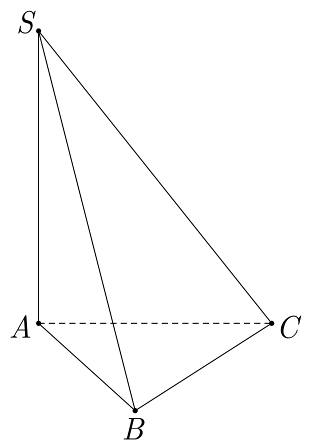
Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

A. 60^0.

B. 90^0.

C. 45^0.

D. 30^0.



Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)(x-2)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ là

A. $f(2)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(3)$. **D.** $f(-1)$.

Câu 30: Cho hình trụ có chiều cao bằng 6. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình chữ nhật có chu vi bằng 28. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

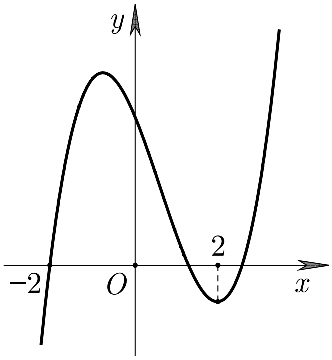
A. 48π. **B.** 96π. **C.** 24π. **D.** 36π.

Câu 31: Hàm số $y = \ln\left(x^3 - 3x^2 + 1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 32: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $ab < 0$.
B. $bc < 0$.
C. $ac < 0$.
D. $bd < 0$.



Câu 33: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \,\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t = \sin x$ thì

A. $I = \int_0^1 (1 - t^2)^2 \mathrm{d}t$. **B.** $I = -\int_0^1 t^4 \mathrm{d}t$. **C.** $I = \int_0^1 t^4 \mathrm{d}t$. **D.** $I = -\int_0^1 (1 - t^2)^2 \mathrm{d}t$.

Câu 34: Cho số phức z thoả mãn $\left|z\right| - z = 1 + 3i$. Tính tích của phần thực và phần ảo của z.

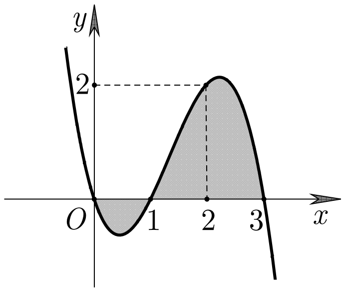
A. 12. **B.** -7. **C.** -12. **D.** 7.

Câu 35: Cho số thực m và phương trình bậc hai $z^2 + mz + 1 = 0$. Khi phương trình không có nghiệm thực, gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất của $T = \left|z_1 - z_2\right|$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 36: Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc 3 có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng được tô đậm.

A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{9}{4}$.
C. $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{8}{3}$.



Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 1 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;\, 2;\, 5)$, cắt đường thẳng d và song song với mặt phẳng (P). Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-5}{3}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{-3}$. **D.** $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{5}$.

Câu 38: Phương trình $\ln(x^2 - 1).\ln(x + 2).\ln(x + 3) = 0$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 39: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, $AB = a$, $\widehat{BAC} = 120^0$, $AA' = 2a$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{16\pi a^2}{3}$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $16\pi a^2$.

Câu 40: Do ảnh hưởng của dịch Covid 19 nên doanh thu 6 tháng đầu năm của công ty A không đạt kế hoạch. Cụ thể, doanh thu 6 tháng đầu năm đạt 20 tỷ đồng, trong đó tháng 6 đạt 6 tỷ đồng. Để đảm bảo doanh thu cuối năm đạt được kế hoạch năm, công ty đưa ra chỉ tiêu: kể từ tháng 7, mỗi tháng phải tăng doanh thu so với tháng kề trước 10%. Hỏi theo chỉ tiêu đề ra thì doanh thu cả năm của công ty A đạt được là bao nhiêu tỷ đồng (làm tròn đến một chữ số thập phân) ?

A. $56,9$. **B.** $70,9$. **C.** $66,3$. **D.** $80,3$.

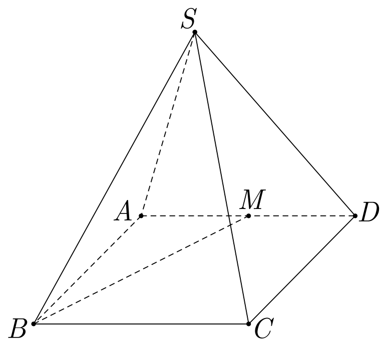
Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho hàm số $y=x^3+x^2+(1-m)x+2$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. Vô số. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 42: Đội tuyển học sinh giỏi Tỉnh môn Toán của trường X có 10 học sinh. Số thẻ dự thi của 10 học sinh này được đánh số từ 1 đến 10. Chọn ngẫu 3 học sinh từ 10 em của đội tuyển. Tính xác suất để không có 2 học sinh nào trong 3 em được chọn có hiệu các số thẻ dự thi bằng 5.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 43: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $AB=2a$, $SA=\sqrt{3}a$ (minh họa như hình bên). Gọi M là trung điểm của AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BM bằng



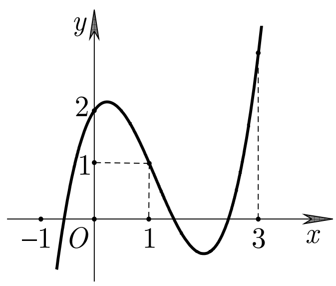
A. $\frac{2\sqrt{93}a}{31}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}a}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thoả mãn $2f'(x^2)=9x\sqrt{f(x^2)}$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Biết $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$, tính giá trị $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên đoạn $[-3;4]$ hàm số $g(x)=f\left(\frac{x}{2}+1\right)-\ln\left(x^2+8x+16\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 1. **B.** 3.

C. 2. **D.** 0.

Câu 46: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

$$\log_3(x^2+2mx+2m^2-1)\le 1+\log_2(x^2+2x+3).\log_3(x^2+3).$$

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

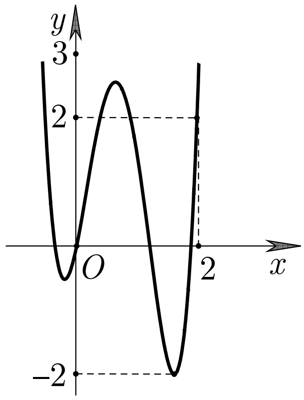
Câu 47: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Gọi O là giao điểm của AC với BD và M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC, OD. Mặt phẳng (MNP) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích của khối đa diện chứa đỉnh B bằng

A. $\frac{17a^3}{18}$. **B.** $\frac{19a^3}{54}$. **C.** $\frac{11a^3}{27}$. **D.** $\frac{19a^3}{18}$.

Câu 48: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y=\left|-x^4+mx^3+2m^2x^2+m-1\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(\left|x^3-3x\right|\right)=m$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;2]$?



A. 4.
B. 3.
C. 1.
D. 2.

Câu 50: Cho các số thực a, b thoả mãn $a>b>0$ và $\log_2(a-b)=\log_3(a+b)$. Khi biểu thức $P=\log_2 a+\log_2 b+2\log_3(a+b)-2\log_2(a^2+b^2)$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị $a-b$ thuộc khoảng nào sau đây ?

A. $(3;4)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(2;3)$.

----------- HẾT ----------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

ĐÁP ÁN ĐỀ KSCL THEO ĐỊNH HƯỚNG THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ XÉT TUYỂN ĐẠI HỌC NĂM 2020 - LẦN 2
Bài thi: Môn Toán

Mã đề	Câu	Đáp án	Mã đề	Câu	Đáp án	Mã đề	Câu	Đáp án	Mã đề	Câu	Đáp án
132	1	**D**	209	1	**B**	357	1	**B**	485	1	**D**
132	2	**C**	209	2	**D**	357	2	**C**	485	2	**B**
132	3	**C**	209	3	**A**	357	3	**B**	485	3	**A**
132	4	**A**	209	4	**A**	357	4	**A**	485	4	**D**
132	5	**A**	209	5	**B**	357	5	**D**	485	5	**A**
132	6	**D**	209	6	**D**	357	6	**A**	485	6	**A**
132	7	**A**	209	7	**D**	357	7	**B**	485	7	**B**
132	8	**B**	209	8	**A**	357	8	**B**	485	8	**B**
132	9	**A**	209	9	**D**	357	9	**A**	485	9	**D**
132	10	**C**	209	10	**A**	357	10	**A**	485	10	**A**
132	11	**D**	209	11	**C**	357	11	**A**	485	11	**C**
132	12	**C**	209	12	**A**	357	12	**B**	485	12	**A**
132	13	**C**	209	13	**C**	357	13	**D**	485	13	**A**
132	14	**D**	209	14	**B**	357	14	**C**	485	14	**D**
132	15	**C**	209	15	**A**	357	15	**D**	485	15	**D**
132	16	**D**	209	16	**D**	357	16	**C**	485	16	**C**
132	17	**B**	209	17	**A**	357	17	**D**	485	17	**C**
132	18	**A**	209	18	**D**	357	18	**C**	485	18	**C**
132	19	**B**	209	19	**A**	357	19	**C**	485	19	**D**
132	20	**B**	209	20	**C**	357	20	**D**	485	20	**D**
132	21	**A**	209	21	**C**	357	21	**D**	485	21	**D**
132	22	**A**	209	22	**B**	357	22	**D**	485	22	**B**
132	23	**D**	209	23	**D**	357	23	**D**	485	23	**C**
132	24	**D**	209	24	**D**	357	24	**A**	485	24	**A**
132	25	**C**	209	25	**D**	357	25	**A**	485	25	**D**
132	26	**B**	209	26	**C**	357	26	**C**	485	26	**D**
132	27	**A**	209	27	**B**	357	27	**C**	485	27	**A**
132	28	**B**	209	28	**D**	357	28	**B**	485	28	**C**
132	29	**A**	209	29	**B**	357	29	**C**	485	29	**A**
132	30	**D**	209	30	**A**	357	30	**B**	485	30	**D**
132	31	**D**	209	31	**D**	357	31	**A**	485	31	**B**
132	32	**C**	209	32	**B**	357	32	**A**	485	32	**A**
132	33	**B**	209	33	**A**	357	33	**C**	485	33	**B**
132	34	**C**	209	34	**C**	357	34	**A**	485	34	**B**
132	35	**A**	209	35	**A**	357	35	**A**	485	35	**B**
132	36	**B**	209	36	**A**	357	36	**B**	485	36	**A**
132	37	**C**	209	37	**C**	357	37	**B**	485	37	**C**
132	38	**C**	209	38	**C**	357	38	**D**	485	38	**C**
132	39	**A**	209	39	**B**	357	39	**A**	485	39	**D**
132	40	**D**	209	40	**B**	357	40	**D**	485	40	**B**
132	41	**B**	209	41	**B**	357	41	**C**	485	41	**D**
132	42	**D**	209	42	**A**	357	42	**B**	485	42	**C**
132	43	**C**	209	43	**C**	357	43	**B**	485	43	**C**
132	44	**B**	209	44	**C**	357	44	**C**	485	44	**C**
132	45	**A**	209	45	**B**	357	45	**C**	485	45	**C**
132	46	**D**	209	46	**A**	357	46	**D**	485	46	**B**
132	47	**A**	209	47	**B**	357	47	**D**	485	47	**C**
132	48	**B**	209	48	**C**	357	48	**C**	485	48	**B**
132	49	**B**	209	49	**C**	357	49	**B**	485	49	**A**
132	50	**A**	209	50	**D**	357	50	**C**	485	50	**B**

BẢNG ĐÁP ÁN

1D	2C	3C	4A	5A	6D	7A	8B	9A	10C	11D	12C	13C	14D	15C
16D	17B	18A	19B	20B	21A	22A	23D	24D	25C	26B	27A	28B	29A	30D
31D	32C	33B	34C	35A	36B	37C	38C	39A	40D	41B	42D	43C	44B	45A
46D	47A	48B	49B	50A										

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 29. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x\left(x+1\right)\left(x-2\right)^2$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;3\right]$ là

A. $f\left(2\right)$. **B.** $f\left(0\right)$. **C.** $f\left(3\right)$. **D.** $f\left(-1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in\left[-1;3\right]\\x=-1\in\left[-1;3\right]\\x=2\in\left[-1;3\right]\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	-1		0		2		3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(3)$

Vậy $\min\limits_{[-1;3]} f\left(x\right)=f\left(0\right)$.

Câu 30. Cho hình trụ có chiều cao bằng 6. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình chữ nhật có chu vi bằng 28. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 48π. **B.** 24π. **C.** 96π. **D.** 36π.

Lời giải

Chọn A

Khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục ta được 1 hình chữ nhật có kích thước lần lượt là chiều cao h và đường kính đáy d của hình trụ.

Theo giả thiết: chu vi thiết diện bằng 28 $\Rightarrow 2\left(h+d\right)=28$ mà $h=6$ nên $d=28:2-6=8$.

Khi đó diện tích xung quanh của trụ là: $S=\pi dh=8.6.\pi=48\pi$

Câu 31. Hàm số $y=\ln\left(x^3-3x^2+1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 **B.** 3 **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

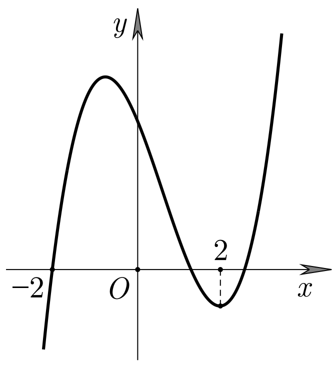
Hàm số xác định khi $x^3-3x^2+1>0$

Ta có: $y'=\dfrac{3x^2-6x}{x^3-3x^2+1}$,

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0(n)\\x_0=2(l)\end{array}\right.$

Ta nhận thấy y' đổi dấu khi qua $x_0=0$. Suy ra hàm số có 1 điểm cực trị

Câu 32. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị nhưhình bên. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?



A. $ab<0.$ **B.** $bc<0.$ **C.** $ac<0.$ **D.** $bd<0.$

Lời giải

Chọn B

Vì đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Theo hình dáng đồ thị ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}+\dfrac{d}{x^3}\right)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}+\dfrac{d}{x^3}\right)=+\infty$ nên hệ số $a>0$.

Hàm số có hai cực trị nằm về hai phía của trục tung nên phương trình $3ax^2+2bx+c=0$ có hai nghiệm trái dấu hay $3ac<0\longrightarrow c<0$.

Theo đồ thị ta có phương trình $y'=0$ có hai nghiệm $x=2$ và $x=x_0$ với $-2<x_0<0$.

Khi đó ta có: $3ax^2+2bx+c=3(x-2)(x-x_0)\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=3x^2-3(x_0+2)+6x_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{-3(x_0 + 2)}{2} \\ c = 6x_0 \end{cases}$$ mà $-2 < x_0 < 0$ nên $b < 0$. Do vậy $bc > 0$.

Câu 33. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5 xdx$. Nếu đặt $t = \sin x$ thì

A. $I = \int_0^1 (1-t^2)^2 dt.$ **B.** $I = -\int_0^1 t^4 dt.$ **C.** $I = \int_0^1 t^4 dt..$ **D.** $I = -\int_0^1 (1-t^2)^2 dt.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x.cosxdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^2 .cosxdx$

Đặt $t = \sin x \to dt = \cos xdx$

Đổi cận: Với $x = 0 \to t = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2} \to t = 1$

Vậy $I = \int_0^1 (1-t^2)^2 dt.$

Do đó đáp án cần tìm là đáp án#A.

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $|z| - z = 1 + 3i$. Tính tích phần thực và phần ảo của số phức z.

A. 12. **B.** -7. **C.** -12. **D.** 7.

Lời giải

Giả sử $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Theo bài ra ta có: $\sqrt{x^2 + y^2} - (x + yi) = 1 + 3i \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right) - yi = 1 + 3i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1 \\ -y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} = x + 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Giải PT: $\sqrt{x^2 + 9} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 9 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4(TM)$.

Suy ra: $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$.

Khi đó phần thực của số phức z là $x = 4$

phần ảo của số phức z là $y = -3$

Vậy tích phần thực và phần ảo của số phức z bằng $x.y = 4.(-3) = -12$.

Câu 35. Cho số thực m và phương trình bậc hai $z^2+mz+1=0$. Khi phương trình không có nghiệm thực, gọi $z_1,\ z_2$ là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất của $T=\left|z_1-z_2\right|$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $z^2+mz+1=0$ không có nghiệm thực khi và chỉ khi $\Delta=m^2-4<0\Leftrightarrow m\in\left(-2;\ 2\right)$
.

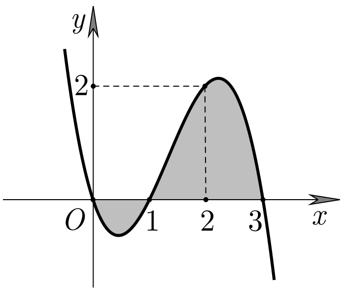
Khi đó $z_1=\dfrac{-m-i\sqrt{4-m^2}}{2}$ và $z_1=\dfrac{-m+i\sqrt{4-m^2}}{2}$.

$T=\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{4-m^2}\le 2$.

Khi $T=2\Leftrightarrow m=0\in\left(-2;2\right)$.

Vậy giá trị lớn nhất của T bằng 2, khi $m=0$.

Câu 36. Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm số đa thức bậc 3 có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng được tô đậm.



A. $\dfrac{37}{12}$. **B.** $\dfrac{9}{4}$. **C.** $\dfrac{5}{12}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$. Vì đồ thị hàm số đi qua gốc toạ độ nên suy ra $d=0$.

Mặt khác, đồ thị hàm số đi qua 3 điểm có toạ độ $\left(1;0\right),\left(2;2\right),\left(3;0\right)$ nên ta có hệ phương trình sau $\begin{cases}a+b+c=0\\8a+4b+2c=2\\27a+9b+3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=4\\c=-3\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=-x^3+4x^2-3x.$

Diện tích hình phẳng được tô đậm là $S=\int\limits_0^3\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

$=-\int\limits_0^1\left(-x^3+4x^2-3x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^3\left(-x^3+4x^2-3x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{37}{12}.$

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=2\\y=2+t\\z=2t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+z-1=0$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;5)$, cắt đường thẳng *d* và song song với mặt phẳng (*P*). Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-5}{1}$.

B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-5}{3}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{-3}$.

D. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{5}$.

Lời giải

Gọi *B* là giao điểm của *d* và $\Delta \Rightarrow B(2;2+t;2t) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;t;2t-5)$.

Do Δ song song với (*P*) nên $\overrightarrow{AB}$ vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;1)$ của (*P*), tức là:

$2+t+2t-5=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;1;-3)$

Vậy đường thẳng Δ cần tìm là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{-3}$.

Câu 38. Phương trình $\ln(x^2-1).\ln(x+2).\ln(x+3)=0$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

ĐKXĐ: $\begin{cases}x^2-1>0\\x+2>0\\x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<x<-1\\x>1\end{array}\right.$

Ta có $\ln(x^2-1).\ln(x+2).\ln(x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\ln(x^2-1)=0\\\ln(x+2)=0\\\ln(x+3)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-1=1\\x+2=1\\x+3=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{2}\\x=\sqrt{2}\\x=-1\\x=-2\end{array}\right.$

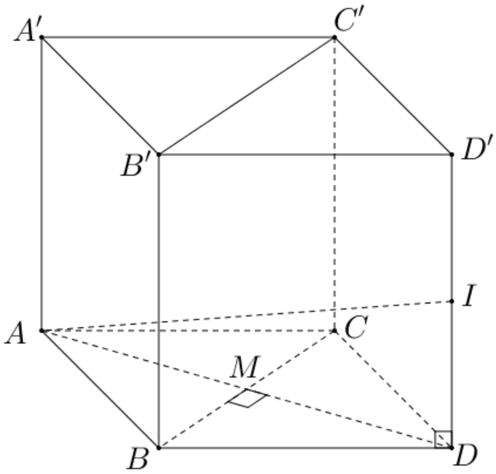
Đối chiếu điều kiện, phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$

Câu 39. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, $AB=a$, $BAC=120^0$, $AA'=2a$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{16\pi a^2}{3}$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $16\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC.

Do tam giác ABC cân tại A, $AB = a$ và $BAC = 120^0$ nên $\triangle ABD$ và $\triangle ACD$ là các tam giác đều cạnh a. Suy ra $DA = DB = DC = a$.

Dựng hình hộp đứng $ABDC.A'B'D'C'$. Gọi I là trung điểm của DD'.

Dễ thấy: $IA = IB = IC = IA' = IB' = IC' = \sqrt{ID^2 + BD^2}$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$S = 4\pi R^2 = 4.\pi.2a^2 = 8\pi a^2$.

Câu 40. Do ảnh hưởng của dịch Covid 19 nên doanh thu 6 tháng đầu năm của công ty A không đạt kế hoạch. Cụ thể, doanh thu 6 tháng đầu năm đạt 20 tỷ đồng, trong đó tháng 6 đạt 6 tỷ đồng. Để đảm bảo doanh thu cuối năm đạt được kế hoạch năm, công ty đưa ra chỉ tiêu: kể từ tháng 7, mỗi tháng phải tăng doanh thu so với tháng kề trước 10%. Hỏi theo chỉ tiêu đề ra thì doanh thu cả năm của công ty A đạt được là bao nhiêu tỷ đồng (làm tròn đến một chữ số thập phân) ?

A. 56,9. **B.** 70,9. **C.** 66,3. **D.** 80,3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $r = 10\% = 0,1$

Doanh thu của tháng 7 là $6(1+r)$

Doanh thu của tháng 8 là $6(1+r)(1+r) = 6(1+r)^2$

Tương tự như thế, ta có doanh thu của tháng 12 là $6(1+r)^6$

Do đó doanh thu của công ty trong 6 tháng cuối năm là

$$6(1+r) + 6(1+r)^2 + ... + 6(1+r)^6 = 6(1+r)\frac{(1+r)^6 - 1}{r}$$

$$= 6(1+0,1)\frac{(1+0,1)^6 - 1}{0,1}$$

$\approx 50,9$

Vậy doanh thu của công ty trong năm là: $20+50,9=70,9$.

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho hàm số $y=x^3+x^2+(1-m)x+2$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. Vô số. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=3x^2+2x+1-m$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow 3x^2+2x+1-m \geq 0, \quad \forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2+2x+1 \geq m, \quad \forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow \min\limits_{[1;+\infty)}\left(3x^2+2x+1\right) \geq m$

$\Leftrightarrow 6 \geq m$.

Do m nguyên dương nên $m \in \{1;2;3;4;5;6\} \Rightarrow$ Có 6 giá trị của m thỏa mãn.

(Hàm số $y=3x^2+2x+1$ đồng biến, $\forall x \in (1;+\infty)$ nên $\min\limits_{x\in[1;+\infty)}\left(3x^2+2x+1\right)=3.1^2+2.1+1=6$).

Câu 42. Đội tuyển học sinh giỏi Tỉnh môn Toán của trường X có 10 học sinh. Số thẻ dự thi của 10 học sinh này được đánh số từ 1 đến 10. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ 10 em của đội tuyển. Tính xác suất để không có 2 học sinh nào trong 3 em được chọn có hiệu các số thẻ dự thi bằng 5.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{2}{5}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{3}{5}$

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của không gian mẫu bằng với số cách chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ 10 em học sinh của đội tuyển: $|\Omega|=C_{10}^3$.

Gọi A là biến cố: " Không có 2 học sinh nào trong 3 em học sinh được chọn có hiệu các số thẻ dự thi bằng 5".

Và $\overline{A}$ là biến cố " Có đúng 2 học sinh trong 3 em học sinh được chọn có hiệu các số thẻ dự thi bằng 5".

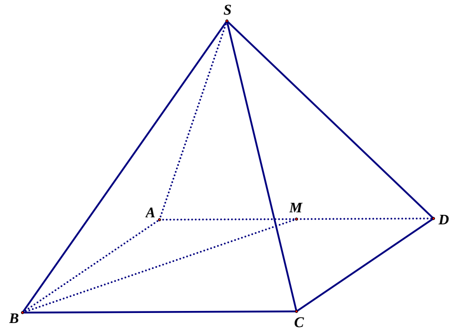
Gọi số thẻ của 3 bạn được chọn lần lượt là a,b,c $\left(a,b,c \in \mathbb{N}^*\right)$ thỏa mãn $1 \leq a < b < c \leq 10$.

Giả sử chọn 1 cặp bất kỳ có hiệu các số thẻ dự thi bằng 5 như sau $\left[\begin{array}{l} b-a=5 \\ c-b=5 \\ c-a=5 \end{array}\right.$ thì chọn số còn lại không thể có hiệu bằng 5 vì $max|c-a|=9$. Chọn 3 học sinh chỉ có 1 cặp có hiệu các số thẻ dự thi bằng 5 là một trong các khả năng sau về số thẻ dự thi: $(10,5);(9,4);(8,3);(7,2);(6,1)$.

Khi đó số khả năng xảy ra bằng số cách chọn 1 số còn lại trong 8 số thẻ dự thi. Ta có $\left|\overline{A}\right|=5.C_8^1=40$.

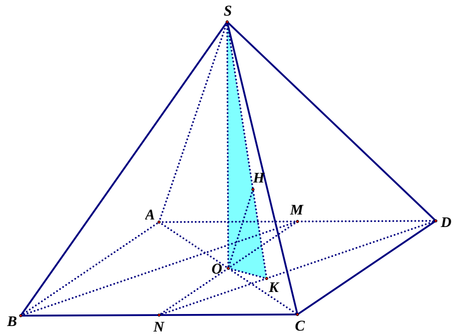
Vậy $P(A)=1-\frac{|\overline{A}|}{|\Omega|}=\frac{2}{3}$.

Câu 43. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $AB=2a$, $SA=\sqrt{3}a$ (minh họa như hình bên). Gọi M là trung điểm của AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BM bằng



A. $\frac{2\sqrt{93}a}{31}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}a}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Lời giải



* Trong $(ABCD)$, gọi N là trung điểm của BC và O là giao điểm của AC và MN, ta có $SO\perp(ABCD)$. Vẽ $OK\perp ND \Rightarrow ND\perp(SOK)$;

Vẽ $OH\perp SK \Rightarrow OK\perp(SND)\Rightarrow d\left(O,(SND)\right)=OH$.

Tam giác NKO đồng dạng với tam giác NMD nên

suy ra $\frac{OK}{DM}=\frac{ON}{DN}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow OK=\frac{a}{\sqrt{5}}$, $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=a$.

Do đó $d\left(O,(SND)\right)=OH=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OK^2}}}=\frac{\sqrt{6}a}{6}$. (1)

* $BM//ND \Rightarrow BM//(SND)\Rightarrow d(BM,SD)=d\left(M,(SND)\right)=2d\left(O,(SND)\right)$. (2)

*Từ (1) và (2) suy ra $d(BM,SD)=\frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Câu 44. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm, nhận giá trị dương trên $\left(0;+\infty\right)$ và thỏa mãn $2f'\left(x^2\right)=9x\sqrt{f\left(x^2\right)}$ với mọi $x\in\left(0;+\infty\right)$. Biết $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$, tính giá trị $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào giả thiết ta có $2f'\left(x^2\right)=9x\sqrt{f\left(x^2\right)}\Leftrightarrow\frac{xf'\left(x^2\right)}{\sqrt{f\left(x^2\right)}}=\frac{9x^2}{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{f\left(x^2\right)}\right)'=\frac{9x^2}{2}$.

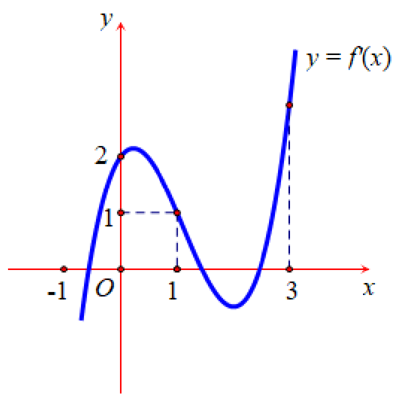
Lấy nguyên hàm hai vế ta có $\sqrt{f\left(x^2\right)}=\int\frac{9x^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{3x^3}{2}+C$.

Theo giả thiết $\sqrt{f\left(\frac{2}{3}\right)}=\frac{3\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3}{2}+C=\sqrt{\frac{2}{3}}\Leftrightarrow C=0$.

Do đó $\sqrt{f\left(x^2\right)}=\frac{3x^3}{2}$, suy ra $\sqrt{f\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{3\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{12}$.

Câu 45. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên đoạn $\left[-3;4\right]$ hàm số $g\left(x\right)=f\left(\frac{x}{2}+1\right)-\ln\left(x^2+8x+16\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

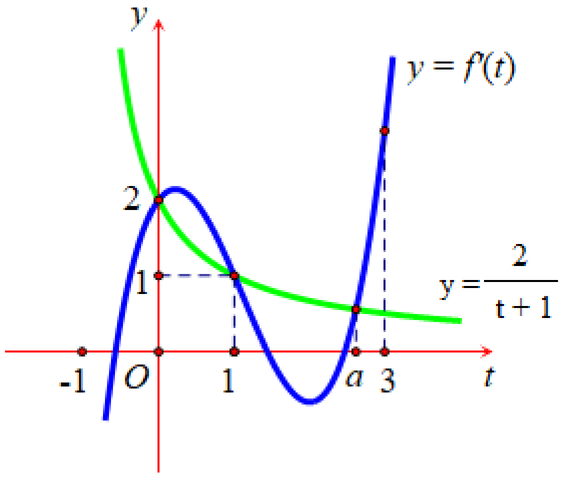
Lời giải

Chọn B

Ta có $g'\left(x\right)=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{2x+8}{x^2+8x+16}=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{2}{x+4}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{4}{x+4}$ (1)

Đặt $\frac{x}{2}+1=t \Leftrightarrow x=2t-2; x\in[-3;4] \Leftrightarrow t\in\left[-\frac{1}{2};3\right]$ thì $(1) \Leftrightarrow f'(t)=\frac{2}{t+1}$



Ta thấy đồ thị các hàm $y=f'(t)$ và $y=\frac{2}{t+1}$ cắt nhau tại các điểm $t=0; t=1; t=a\in(1;3)$ nên phương trình $f'(t)=\frac{2}{t+1}$ có 3 nghiệm $t=0; t=1; t=a\in(1;3)$, do đó phương trình $g'(x)=0$ có 3 nghiêm phân biệt $x=-2; x=0; x=2a-2\in[-3;4]$.

Vậy trên đoạn $[-3;4]$ hàm số $g(x)=f\left(\frac{x}{2}+1\right)-\ln\left(x^2+8x+16\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

$\log_3\left(x^2+2mx+2m^2-1\right)\le 1+\log_2\left(x^2+2x+3\right)\log_3\left(x^2+3\right)$

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Để bất phương trình đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$, điều kiện cần là $x^2+2mx+2m^2-1>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Tức là $\Delta'=1-m^2<0 \Leftrightarrow m^2>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right.$.

Vì bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên:

*Chọn $x=0$ khi đó

$\log_3\left(2m^2-1\right)\le 1+\log_2 3 \Leftrightarrow 2m^2-1\le 3^{\log_2 6} \Leftrightarrow m^2\le\frac{1+3^{\log_2 6}}{2}$, vì m nguyên nên $-3\le m\le 3$.

*Chọn $x=-1$ khi đó

$\log_3\left(2m^2-2m\right)\le 1+\log_3 4 \Leftrightarrow 2m^2-2m\le 12 \Leftrightarrow m^2-m-6\le 0 \Leftrightarrow -2\le m\le 3$.

*Chọn $x=1$ khi đó

$\log_3\left(2m^2+2m\right)\le 1+\log_3 4 \Leftrightarrow 2m^2+2m\le 12 \Leftrightarrow m^2+m-6\le 0 \Leftrightarrow -3\le m\le 2$.

Kết hợp điều kiện ta nhận các giá trị m là $\{-2;2\}$.

Thử lại:

a) Với $m=-2$, bất phương trình trở thành $\log_3\left(x^2-4x+7\right)\le 1+\log_2\left(x^2+2x+3\right)\log_3\left(x^2+3\right)$.

Ta có : $\log_2\left(x^2+2x+3\right)=\log_2\left[\left(x+1\right)^2+2\right]\ge 1,\ \log_3\left(x^2+3\right)\ge 1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta cần chứng minh $\log_3\left(x^2-4x+7\right)\le 1+\log_3\left(x^2+3\right), \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow x^2-4x+7\le 3\left(x^2+3\right)\Leftrightarrow 0\le 2\left(x+1\right)^2$ luôn đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$, dấu bằng xảy ra tại $x=-1$ (thỏa).

b) Với $m=2$, bất phương trình trở thành $\log_3\left(x^2+4x+7\right)\le 1+\log_2\left(x^2+2x+3\right)\log_3\left(x^2+3\right)$.

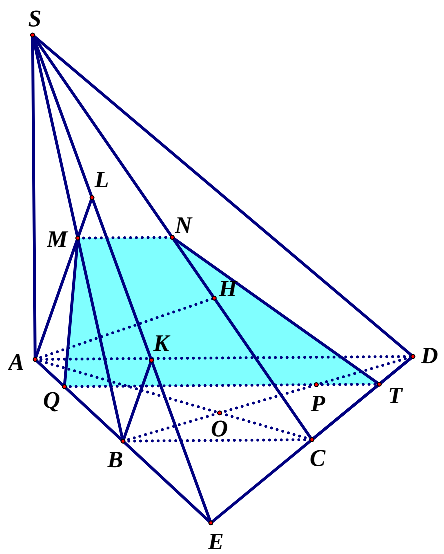
Chứng minh tương tự ta có $x^2+4x+7\le 3\left(x^2+3\right)\Leftrightarrow 0\le 2\left(x-1\right)^2$ luôn đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$, dấu bằng không thể xảy ra (thỏa).

Vậy có 2 giá trị nguyên m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Gọi O là giao điểm của AC với BD và M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC, OD. Mặt phẳng (MNP) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích của khối đa diện chứa đỉnh B bằng

A. $\dfrac{17a^3}{18}$. **B.** $\dfrac{19a^3}{54}$. **C.** $\dfrac{11a^3}{27}$. **D.** $\dfrac{19a^3}{18}$.

Lời giải



* Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang $MNTQ$ như hình vẽ.

Thể tích của khối đa diện chứa đỉnh B là $V_{(B)} = V_{M.BCTQ} + V_{M.NCT}$ (1)

Dễ thấy tam giác ACD vuông cân tại C suy ra $CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC$

$\Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C $\Rightarrow$ $S_{SCD} = \frac{1}{2}SC.CD = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2}.\sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{3}a^2$.

$\Rightarrow \frac{S_{CNT}}{S_{CSD}} = \frac{CN}{CS}.\frac{CT}{CD} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{CNT} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2$.

Ta có $CD \perp (SAC)$.

Vẽ $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d\left(A,(SCD)\right) = AH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

*Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $\{E\} = AB \cap DC$.

Trong mặt phẳng (SAB), gọi $\{L\} = AM \cap SE$ và K là trung điểm EL.

Ta có $AL = 2BK = 2(2ML) = 4ML$. Suy ra $\Rightarrow d\left(M,(SCD)\right) \Rightarrow \frac{1}{4}d\left(A,(SCD)\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

$V_{M.NCT} = \frac{1}{3}S_{CNT}.d\left(M,(SCD)\right) = \frac{1}{18}a^3$. (2)

* Vì $QT // AD$ nên suy ra $\begin{cases} QB = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}a \\ QT = \frac{5}{6}AD = \frac{5}{3}a \end{cases} \Rightarrow S_{BCTQ} = \left(\frac{QT + BC}{2}\right).QB = \frac{8}{9}a^2$.

$\frac{SM}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow d\left(M,(ABCD)\right) \Rightarrow \frac{1}{2}d\left(A,(ABCD)\right) = a$.

$V_{M.BCTQ} = \frac{1}{3}S_{BCTQ}.d\left(M,(ABCD)\right) = \frac{8}{27}a^3$. (3)

*Từ (1), (2), (3) suy ra $V_{(B)} = \frac{19a^3}{54}$.

Câu 48. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = \left|-x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1\right|$ đồng biến $(1;+\infty)$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = x^4 - mx^3 - 2m^2x^2 - m + 1$. Khi đó: $y = \left|f(x)\right| \Rightarrow y' = \frac{f'(x).f(x)}{\left|f(x)\right|}$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ $\dfrac{f'(x).f(x)}{|f(x)|}\ge 0, \forall x\in(1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f'(x)\ge 0\\ f(x)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases} f'(x)\le 0\\ f(x)\le 0\end{cases}\end{array}\right., \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 4x^3-3mx^2-4m^2x\ge 0\\ f(1)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases} 4x^3-3mx^2-4m^2x\le 0\\ f(1)\le 0\end{cases}\end{array}\right., \forall x\in(1;+\infty)$$

TH1: $\begin{cases} 4x^3-3mx^2-4m^2x\ge 0\\ f(1)\ge 0\end{cases}, \forall x\in(1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-3mx-4m^2\ge 0\\ 2-4m\ge 0\end{cases}, \forall x\in(1;+\infty)$

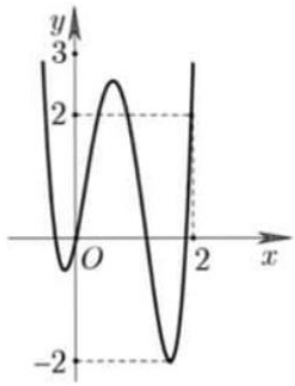
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=0\\ m\in\left(\dfrac{-3-\sqrt{75}}{8};\dfrac{-3+\sqrt{75}}{8}\right)\end{array}\right.\\ m\le \dfrac{1}{2}\end{cases}. \text{ Mà } m\in\mathbb{Z}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1\\ m=0\end{array}\right.$$

TH2: $\begin{cases} 4x^3-3mx^2-4m^2x\le 0\\ f(1)\le 0\end{cases}, \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-3mx-4m^2\le 0\\ 2-4m\le 0\end{cases}, \forall x\in(1;+\infty)$ vô nghiệm.

Do đó $S=\{-1;0\}$.

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -1.

Câu 49. **[Mức độ 4]** Cho hàm số liên tục $y=f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x^3-3x\right|\right)=m$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;2]$?



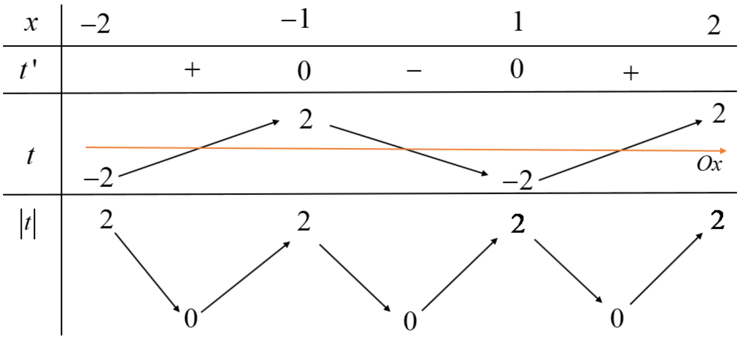
A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Chọn C

Lời giải

Cách 1

Xét hàm số $t=x^3-3x\Rightarrow t'=3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.



Với $a \in (0;2)$ thì $|t| = a$ có 6 nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$.

Với $a = 0$ thì $|t| = a$ có 3 nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$.

Với $a = 2$ thì $|t| = a$ có 4 nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$.

Với $a \notin [0;2]$ thì $|t| = a$ vô nghiệm trên đoạn $[-2;2]$.

Do đó $f\left(\left|x^3 - 3x\right|\right) = m$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;2] \Leftrightarrow f\left(|t|\right) = m$ có 2 nghiệm phân biệt $|t| \in (0;2) \Leftrightarrow m \in (-2;0)$.

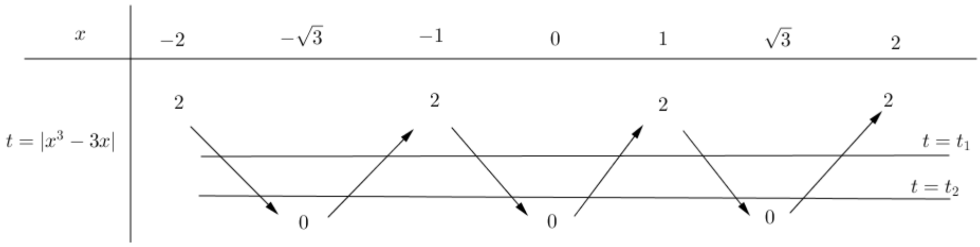
Vậy $m = -1$ (Vì m là số nguyên).

__**Cách 2**__

Xét hàm số $y = x^3 - 3x$ trên $[-2;2]$, ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$ và $x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

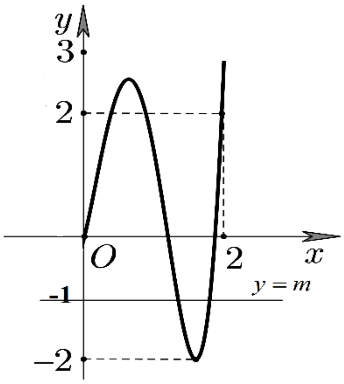
Đặt $t = \left|x^3 - 3x\right| \geq 0$

Bảng biến thiên của hàm số $t = \left|x^3 - 3x\right|$ trên $[-2;2]$ là:



Dựa vào bảng biến thiên suy ra ứng với mỗi nghiệm $t \in (0;2)$ ta có 6 nghiệm $x \in (-2;2)$.

Để phương trình $f\left(\left|x^3 - 3x\right|\right) = m$ có đúng 12 nghiệm thuộc $[-2;2]$ thì trên $[0;2]$ phương trình $f(t) = m$ phải có đúng hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < t_2 < 2$



Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(t)$ trên $[0;2]\Rightarrow$ Chỉ có duy nhất một giá trị nguyên $m=-1$ để phương trình $f(t)=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 thỏa mãn $0<t_1<t_2<2$

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên $m=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50. Cho các số thực a,b thỏa mãn $a>b>0$ và $\log_2(a-b)=\log_3(a+b)$. Khi biểu thức $P=\log_2 a+\log_2 b+2\log_3(a+b)-2\log_2(a^2+b^2)$ đạt giá trị lớn nhất, khi đó $a-b$ thuộc khoảng nào sau đây

A. $(3;4)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\log_2(a-b)=\log_3(a+b)=t\Rightarrow\begin{cases}a-b=2^t\\a+b=3^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=\dfrac{9^t+4^t}{2}\\ab=\dfrac{9^t-4^t}{4}\end{cases}$.

Suy ra

$$P=\log_2\left(\frac{9^t-4^t}{4}\right)+2t-2\log_2\left(\frac{9^t+4^t}{2}\right)=\log_2 2^{2t}+\log_2\frac{9^t-4^t}{\left(9^t+4^t\right)^2}=\log_2\frac{36^t-16^t}{\left(9^t+4^t\right)^2}$$

Xét

$$T=\frac{36^t-16^t}{\left(9^t+4^t\right)^2}=\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^t-1}{\left[\left(\frac{9}{4}\right)^t+1\right]^2}=\frac{u}{(u+2)^2}=\frac{1}{\left(\sqrt{u}+\frac{2}{\sqrt{u}}\right)^2}\le\frac{1}{8},\text{ do } u=\left(\frac{9}{4}\right)^t-1,\ \left|\sqrt{u}+\frac{2}{\sqrt{u}}\right|\ge 2\sqrt{2}.$$

Suy ra $T_{\max}=\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow u=2\Leftrightarrow\left(\dfrac{9}{4}\right)^t=3\Leftrightarrow t=\log_{\frac{9}{4}}3$. Suy ra $P_{\max}=-3$.

Khi đó $a-b=2^{\log_{\frac{9}{4}}3}\approx 2,557$.