SỞ GD & ĐT NAM ĐỊNH
CỤM CÁC TRƯỜNG THPT
HUYỆN NAM TRỰC

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 06 trang)

ĐỀ THI THỬ TN THPT NĂM 2023
Bài thi môn: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút; không kể thời gian giao đề

Họ, tên thí sinh: ....

Số báo danh: ....

Mã đề thi: 501

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, véctơ nào sau đây là một véc tơ pháp tuyến của mp(P): $4x-3y+1=0$?

A. $(4;-3;0)$ **B.** $(4;-3;1)$ **C.** $(4;-3;-1)$ **D.** $(-3;4;0)$

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x-4\right)^{\frac{2}{3}}$ là:

A. $D=(-1;4)$. **B.** $D=\mathbb{R}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$. **D.** $D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

Câu 3. Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2+1\right)=2$ là:

A. $S=\left\{\sqrt{3}\right\}$. **B.** $S=\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$. **C.** $S=\{-1;1\}$. **D.** $S=\{1\}$.

Câu 4. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int_0^2 3^x dx$. **B.** $S=\pi\int_0^2 3^{2x} dx$. **C.** $S=\pi\int_0^2 3^x dx$. **D.** $S=\int_0^2 3^{2x} dx$.

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1=3$ và công bội $q=2$. Số hạng thứ năm của cấp số nhân (u_n) là

A. $u_5=96$ **B.** $u_5=32$ **C.** $u_5=48$ **D.** $u_5=24$

Câu 6. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-3}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=3$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=2$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4$. Mặt cầu (S) có tọa độ của tâm là:

A. $(-1;2;1)$. **B.** $(1;-2;-1)$. **C.** $(1;-2;1)$. **D.** $(1;2;2)$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A; $AB=3a$, $AC=a$ và đường cao $SA=2a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng:

A. $3a^3$ **B.** a^3 **C.** $2a^3$ **D.** $\dfrac{a^3}{3}$

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(SCD)\perp(SAD)$ **B.** $(SBC)\perp(SIA)$ **C.** $(SDC)\perp(SAI)$ **D.** $(SBD)\perp(SAC)$

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c\,(a,b,c\in\mathbb{R})$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực dương của phương trình $2f(x)-3=0$ là:

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 11. Cho một hình trụ có đường sinh bằng $3r$ và bán kính đáy bằng r. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho là:

A. $S_{xq}=8\pi r^2$. **B.** $S_{xq}=3\pi r^2$. **C.** $S_{xq}=6\pi r^2$. **D.** $S_{xq}=2\pi r^2$.

Câu 12. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x-3}$ là $F(x)$ bằng:

A. $-\dfrac{2}{(2x-3)^2}$. **B.** $\dfrac{1}{2(2x-3)^2}$. **C.** $2\ln|2x-3|$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln|2x-3|$.

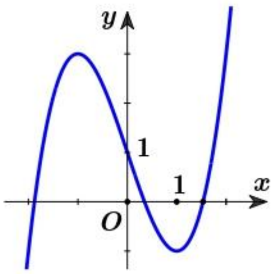
Câu 13. Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là:

A. $(2;-3;-1)$. **B.** $(-1;2;-3)$. **C.** $(2;-1;-3)$. **D.** $(-3;2;-1)$.

Câu 15. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^3+3x+1$. **B.** $y=x^4-x^2+1$. **C.** $y=x^3-3x+1$. **D.** $y=-x^2+x-1$.

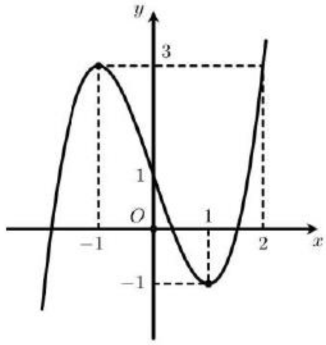
Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $SA=a$, ΔABC đều cạnh a. Tính tang góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

A. $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$. **B.** $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 17. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có cạnh $AB=a$. Gọi H là trung điểm của BC. Thể tích của khối nón tạo thành khi quay hình tam giác ABC xung quanh trục AH là:

A. $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{12}$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;3)$.　**B.** $(0;2)$.　**C.** $(1;+\infty)$.　**D.** $(-1;0)$.

Câu 19. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-24x^2-4$ trên $[0;19]$ bằng:

A. -150.　**B.** -148.　**C.** -149.　**D.** -144.

Câu 20. Số giao điểm của đường cong $(C): y=x^3-2x+1$ và đường thẳng $d: y=x-1$ là:

A. 3.　**B.** 2.　**C.** 0.　**D.** 1.

Câu 21. Biểu thức $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}$, $(x>0)$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là:

A. $P=x^{\frac{5}{12}}$.　**B.** $P=x^{\frac{1}{12}}$.　**C.** $P=x^{\frac{1}{7}}$.　**D.** $P=x^{\frac{5}{4}}$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.　**B.** 1.　**C.** 3.　**D.** 2.

Câu 23. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(1-\dfrac{2e^{-x}}{x^5}\right)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+\dfrac{1}{2x^4}+C$.　**B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x-\dfrac{1}{2x^4}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x-\dfrac{2}{x^4}+C$.　**D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+\dfrac{2}{x^4}+C$.

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=36$ cắt trục Oz tại 2 điểm A, B. Tọa độ trung điểm của đoạn AB là:

A. $(0;0;-1)$.　**B.** $(0;0;1)$.　**C.** $(1;1;0)$.　**D.** $(-1;-1;0)$.

Câu 25. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $f(x)=x^2-4x+1$.　**B.** $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

C. $f(x)=x^3-3x^2+3x-4$.　**D.** $f(x)=x^4-2x^2-4$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) cắt ba trục tọa độ lần lượt tại A,B,C sao cho $M(1;2;3)$ làm trọng tâm tam giác ABC là:

A. $6x+3y+2z-18=0$　**B.** $x+2y+3z=0$

C. $6x-3y+2z-18=0$　**D.** $6x+3y+2z-18=0$ **hoặc** $x+2y+3z=0$

Câu 27. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, biết thể tích khối chóp $S.OAD$ bằng $10cm^3$. Thể tích khối chóp $S.ABD$ bằng:

A. $20cm^3$.　**B.** $30cm^3$.　**C.** $25cm^3$.　**D.** $40cm^3$.

Câu 28. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là:

A. $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$. **C.** $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$.

Câu 29. Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2023;2023]$ để đồ thị hàm số $y=\frac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên trái trục tung là:

A. 4046. **B.** 4044. **C.** 2022. **D.** 2023.

Câu 30. Cho $\int_1^2 f(x)dx=3$ và $\int_1^2\left[3f(x)-g((x))\right]\mathrm{d}x=10$. Khi đó $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. 1. **B.** -4. **C.** 17. **D.** -1.

Câu 31. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{3a}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 32. Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y=\frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ là S. Tính S?

A. $S=4\ln\frac{4}{3}-1$ **B.** $S=\ln\frac{4}{3}-1$ **C.** $S=1-\ln\frac{4}{3}$ **D.** $S=4\ln\frac{4}{3}$

Câu 33. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $CA=CB=a$ và $AA'=6a$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $2a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** a^3. **D.** $6a^3$.

Câu 34. Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2+1\right)=2$ là

A. $S=\left\{\sqrt{3}\right\}$. **B.** $S=\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$. **C.** $S=\{-1;1\}$. **D.** $S=\{1\}$.

Câu 35. Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Tính xác suất để lấy được 2 quả cầu khác màu.

A. $\frac{8}{11}$ **B.** $\frac{5}{11}$ **C.** $\frac{6}{11}$ **D.** $\frac{5}{22}$

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\left|x^4-2x^2-3\right|=2m-1$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt.

A. $3<m<4$. **B.** $2<m<\frac{5}{2}$. **C.** $1<m<\frac{3}{2}$. **D.** $4<m<5$.

Câu 37. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi V_1,V_2,V_3 lần lượt là thể tích của khối trụ ngoại tiếp, khối cầu nội tiếp, khối cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính giá trị $P=\frac{V_1+V_2}{V_3}$.

A. $P=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $P=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **C.** $P=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $P=\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để bất phương trình $\log_3 x^2+m\sqrt{\log_3 x^3}+m+1\le 0$ có không quá 20 nghiệm nguyên?

A. 23. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

Câu 39. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M,N là hai điểm nằm trên hai cạnh SC,SD sao cho $\frac{SM}{SC}=\frac{1}{2},\frac{SN}{ND}=2$, biết G là trọng tâm tam giác SAB. Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{G.MND}}{V_{S.ABCD}}$.

A. $\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{1}{18}$. **C.** $\frac{1}{20}$. **D.** $\frac{1}{12}$.

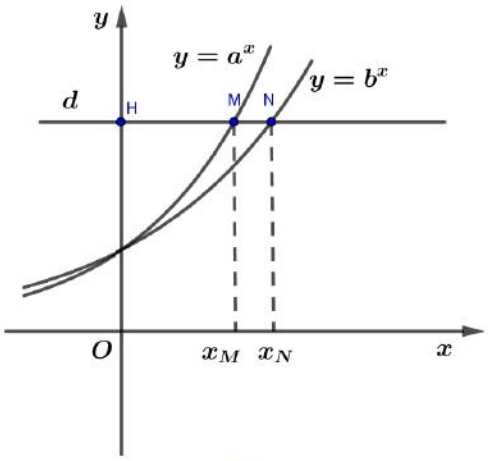
Câu 40. Biết $\int_0^1 \frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}dx=a-\ln b$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+b^2$.

A. 13. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 41. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB=AC=a$, $AA'=a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' theo a.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Câu 42. Cho a,b là các số thực dương khác 1, đường thẳng d song song trục hoành cắt trục tung, đồ thị hàm số $y=a^x$, đồ thị hàm số $y=b^x$ lần lượt tại H, M, N (như hình bên). Biết $HM=3MN$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



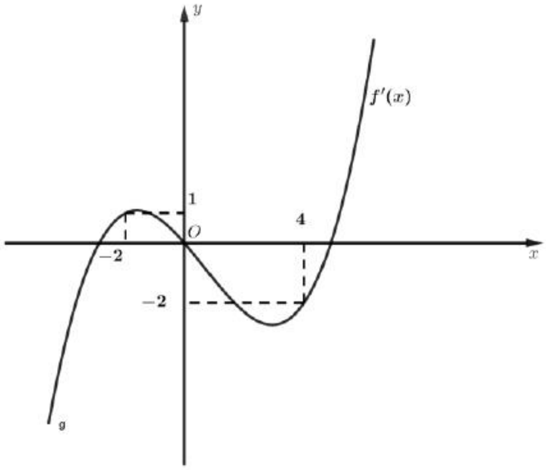
A. $b^4=a^3$. **B.** $b^3=a^4$. **C.** $3a=4b$. **D.** $4a=3b$.

Câu 43. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6$. Điểm M luôn thuộc mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x-2y+6z-9=0$. **B.** $2x+2y+6z+9=0$.

C. $2x-2y+6z+9=0$. **D.** $2x-2y-6z+9=0$.

Câu 44. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=4f(x^2-4)+x^4-8x^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 45. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3<f(5)<4$. **B.** $1<f(5)<2$. **C.** $4<f(5)<5$. **D.** $2<f(5)<3$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x)=x\left[\sin x+f'(x)\right]+\cos x$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$. Giá trị của $f(\pi)$ bằng:

A. $1+\frac{\pi}{2}$. **B.** $-1+\frac{\pi}{2}$. **C.** $1+\pi$. **D.** $-1+\pi$.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $\sqrt{x^3+1}.\left[4x.f'(1-x)-f(x)\right]=x^5$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$ có kết quả dạng $\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$, $(a,b,c\in\mathbb{Z}^+$, $\frac{a}{c},\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Giá trị $T=a-2b+3c$ bằng:

A. 89. **B.** 27. **C.** 35. **D.** 81.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)=2^x-2^{-x}+2023x^3$. Biết rằng tồn tại số thực m sao cho bất phương trình $f\left(4^x-mx+37m\right)+f\left((x-m-37).2^x\right)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(50;70)$. **B.** $(-10;10)$. **C.** $(30;50)$. **D.** $(10;30)$.

Câu 49. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$, $SAB=SCB=90^0$. Khi độ dài cạnh AB thay đổi, thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $3\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{2}$.

Câu 50. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ với x,y là các số nguyên thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $4.2^{y^4-2y^2}-2\log_2(2x)+x=0$ và $2\log_2(x+y)-x-y\ge 0$

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 9.

------------- **HẾT** -------------

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.B	4.A	5.C	6.B	7.B	8.B	9.A	10.B
11.C	12.D	13.C	14.B	15.C	16.A	17.B	18.D	19.B	20.B
21.A	22.D	23.A	24.A	25.C	26.A	27.D	28.C	29.C.C	30.A
31.D	32.A	33.B	34.B	35.C	36.B	37.D	38.D	39.B	40.A
41.D	42.B	43.C	44.C	45.A	46.D	47.D	48.C	49.D	50.B

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mp (P): $4x-3y+1=0$?

A. $(4;-3;0)$.   **B.** $(4;-3;1)$.   **C.** $(4;-3;-1)$.   **D.** $(-3;4;0)$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P): $4x-3y+1=0$ có một vectơ pháp tuyến là $(4;-3;0)$.

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x-4\right)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $D=(-1;4)$.   **B.** $D=\mathbb{R}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$.   **D.** $D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho xác định khi $x^2-3x-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>4 \end{array}\right.$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

Câu 3: Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2+1\right)=2$ là

A. $S=\left\{\sqrt{3}\right\}$.   **B.** $S=\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$.   **C.** $S=\{-1;1\}$.   **D.** $S=\{1\}$.

Lời giải

Chọn B

$\log_2\left(x^2+1\right)=2 \Leftrightarrow x^2+1=2^2$

$\Leftrightarrow x^2=3$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$.

Câu 4: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int\limits_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$.   **B.** $S=\pi\int\limits_0^2 3^{2x}\,\mathrm{d}x$.   **C.** $S=\pi\int\limits_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$.   **D.** $S=\int\limits_0^2 3^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ được tính bằng công thức

$$S=\int_0^2\left|3^x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2 3^x\,\mathrm{d}x\ \left(\text{do } 3^x>0, \forall x\in[0;2]\right).$$

Câu 5: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1=3$ và công bội $q=2$. Số hạng thứ năm của cấp số nhân (u_n) là

A. $u_5=96\cdot$ **B.** $u_5=32\cdot$ **C.** $u_5=48\cdot$ **D.** $u_5=24\cdot$

Lời giải

Chọn C

$u_5=u_1.q^4=3.2^4=48\cdot$

Câu 6: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-3}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=\dfrac{1}{2}\cdot$ **B.** $x=3\cdot$ **C.** $x=-3\cdot$ **D.** $x=2\cdot$

Lời giải

Chọn B

Câu 7: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4$. Mặt cầu (S) có tọa độ của tâm là

A. $(-1;2;1)$. **B.** $(1;-2;-1)\cdot$ **C.** $(1;-2;1)\cdot$ **D.** $(1;2;2)\cdot$

Lời giải

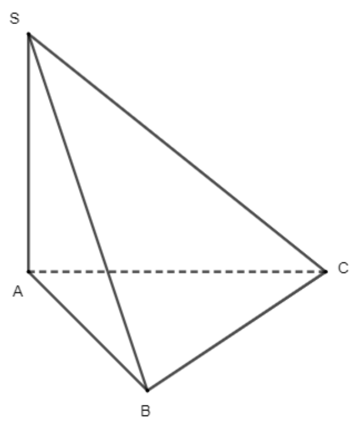
Chọn B

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A; AB=3a; AC=a$ và đường cao $SA=2a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $3a^3\cdot$ **B.** $a^3\cdot$ **C.** $2a^3\cdot$ **D.** $\dfrac{a^3}{3}\cdot$

Lời giải

Chọn B



$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.AC.SA=\frac{1}{6}3a.a.2a=a^3.$$

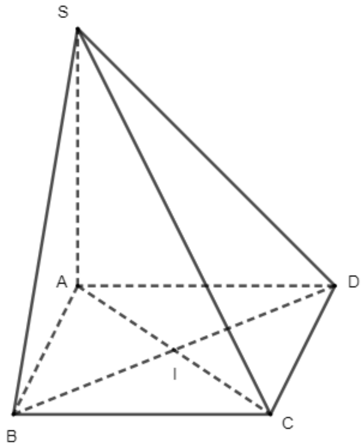
Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(SCD)\perp(SAD)\cdot$ **B.** $(SBC)\perp(SIA)\cdot$

C. $(SDC)\perp(SAI)$.   **D.** $(SBD)\perp(SAC)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$CD\perp AD$ (vì $ABCD$ là hình chữ nhật)

$SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp CD$

$SA\cap AD=A$

$SA, AD\subset(SAD)$

$\Rightarrow CD\perp(SAD)$

Mà $CD\subset(SCD)$ nên $(SCD)\perp(SAD)$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c\,(a,b,c\in\mathbb{R})$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực dương của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A. 1.   **B.** 4.   **C.** 2.   **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$2f(x)-3=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình có 4 nghiệm.

Câu 11: Cho một hình trụ có đường sinh bằng $3r$ và bán kính đáy bằng r. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho là

A. $S_{xq}=8\pi r^2$.   **B.** $S_{xq}=3\pi r^2$.   **C.** $S_{xq}=6\pi r^2$.   **D.** $S_{xq}=2\pi r^2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S_{xq} = 2\pi.3r.r = 6\pi r^2$.

Câu 12: Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$ là

A. $-\dfrac{2}{(2x-3)^2}$. **B.** $\dfrac{1}{2(2x-3)^2}$. **C.** $2\ln|2x-3|$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln|2x-3|$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\displaystyle\int \frac{1}{2x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x-3}d(2x-3) = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$.

Câu 13: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$y'(x) = 3x^2 - 6x - 9 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 3 \end{array}\right.$.

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên $(3;+\infty)$.

Câu 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

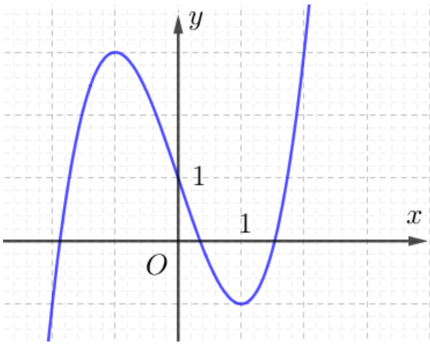
A. $(2;-3;-1)$. **B.** $(-1;2;-3)$. **C.** $(2;-1;-3)$. **D.** $(-3;2;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là $(-1;2;-3)$.

Câu 15: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = -x^3 + 3x + 1$. **B.** $y = x^4 - x^2 + 1$. **C.** $y = x^3 - 3x + 1$. **D.** $y = -x^2 + x - 1$.

Lời giải

Chọn C

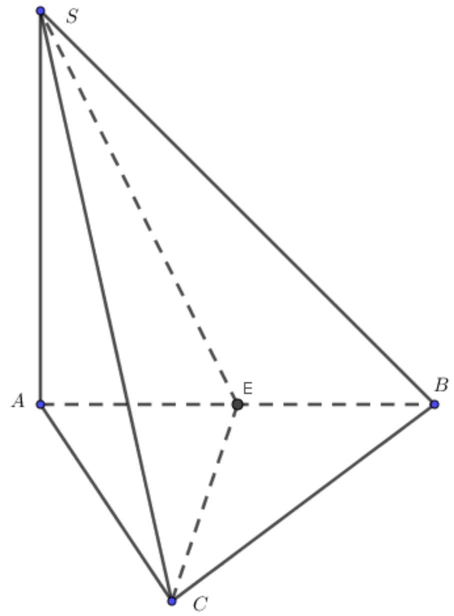
Đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số bậc ba với hệ số $a > 0$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, tam giác ABC đều cạnh a. Tính tan của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

A. $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$. **B.** $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi E là trung điểm của AB, ta có $CE\perp(SAB)\Rightarrow$ góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là góc $\widehat{ESC}$.

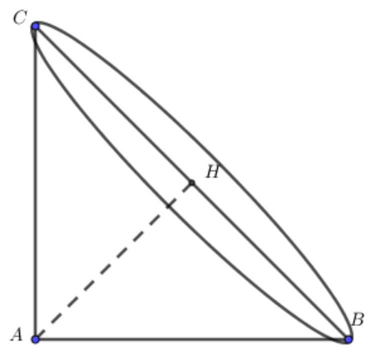
Ta có: $\tan\widehat{ESC}=\dfrac{EC}{SE}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

Câu 17: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có cạnh $AB=a$. Gọi H là trung điểm của BC. Thể tích của khối nón tạo thành khi quay hình tam giác ABC xung quanh trục AH là

A. $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn B

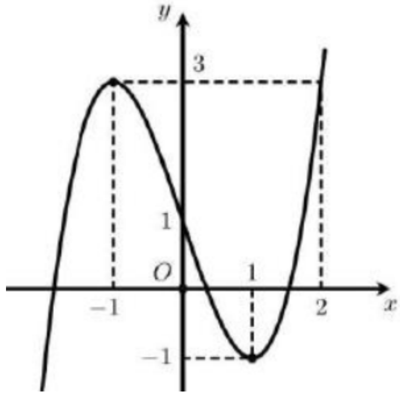


Ta có: $h=AH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=HC=r$

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3=\dfrac{a^3\pi\sqrt{2}}{12}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x)$

đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;3)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Vì $f'(x)>0,\ \forall x\in(-1;0)$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 19: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-24x^2-4$ trên $[0;19]$ bằng

A. -150. **B.** -148. **C.** -149. **D.** -144.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)=x^4-24x^2-4$ có đạo hàm $f'(x)=4x^3-48x$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\sqrt{3}\\x=-2\sqrt{3}\notin[0;19]\end{array}\right.$$

Xét: $f(0)=-4; f\left(2\sqrt{3}\right)=-148;\ f(19)=121653$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-24x^2-4$ trên $[0;19]$ bằng -148.

Câu 20: Số giao điểm của đường cong (C): $y=x^3-2x+1$ và đường thẳng $d: y=x-1$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-2x+1=x-1\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right..$$

Vậy số giao điểm giữa đường cong (C) và đường thẳng d là 2.

Câu 21: Biểu thức $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}},(x>0)$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là:

A. $P=x^{\frac{5}{12}}$. **B.** $P=x^{\frac{1}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{1}{7}}$. **D.** $P=x^{\frac{5}{4}}$.

Lời giải

Chọn A

$$P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}=\sqrt[3]{x^{1+\frac{1}{4}}}=x^{\frac{1+\frac{1}{4}}{3}}=x^{\frac{5}{12}}.$$

Câu 22: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		0		1		2		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Hàm số $f\left(x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Ta có y' đổi dấu khi đi qua $x=-3$ và qua $x=1$ nên số điểm cực trị là 2.

Câu 23: Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=e^{x}\left(1-\dfrac{2e^{-x}}{x^{5}}\right)$.

A. $\int f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=e^{x}+\dfrac{1}{2x^{4}}+C$ **B.** $\int f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=e^{x}-\dfrac{1}{2x^{4}}+C$

C. $\int f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=e^{x}-\dfrac{2}{x^{4}}+C$ **D.** $\int f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=e^{x}+\dfrac{2}{x^{4}}+C$

Lời giải

Chọn A

$$\int f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\int e^{x}\left(1-\frac{2e^{-x}}{x^{5}}\right)\mathrm{d}x=\int\left(e^{x}-\frac{2}{x^{5}}\right)\mathrm{d}x=e^{x}+\frac{1}{2x^{4}}+C\cdot$$

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $\left(x-1\right)^{2}+\left(y-1\right)^{2}+\left(z+1\right)^{2}=36$ cắt trục Oz tại 2 điểm A,B. Tọa độ trung điểm của đoạn AB là:

A. $\left(0;0;-1\right)$ **B.** $\left(0;0;1\right)$ **C.** $\left(1;1;0\right)$ **D.** $\left(-1;-1;0\right)$

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng Oz đi qua điểm $M\left(0;0;1\right)$ và nhận vecto $\vec{k}=\left(0;0;1\right)$ là vecto chỉ phương nên có phương trình là: $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=1+t\end{cases}\quad\left(t\in R\right)$.

Tọa độ 2 điểm A,B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\begin{cases}x=0\\y=0\\z=1+t\end{cases}\\\left(x-1\right)^{2}+\left(y-1\right)^{2}+\left(z+1\right)^{2}=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}x=0\\y=0\\z=1+t\end{cases}\\\left[\begin{array}{l}t=-2+\sqrt{34}\\t=-2-\sqrt{34}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\y=0\\z=-1+\sqrt{34}\end{cases}\\\begin{cases}x=0\\y=0\\z=-1-\sqrt{34}\end{cases}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow A\left(0;0;-1+\sqrt{34}\right);B\left(0;0;-1-\sqrt{34}\right)$

Gọi I là trung điểm của AB.

$\Rightarrow I\left(0;0;-1\right)$

Câu 25: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $f\left(x\right)=x^2-4x+1$. **B.** $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

C. $f\left(x\right)=x^3-3x^2+3x-4$. **D.** $f\left(x\right)=x^4-2x^2-4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f\left(x\right)=x^3-3x^2+3x-4\Rightarrow f'\left(x\right)=3x^2-6x+3=3\left(x-1\right)^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng $\left(P\right)$ cắt ba trục tọa độ lần lượt tại A,B,C sao cho $M\left(1,2,3\right)$ làm trọng tâm tam giác ABC là

A. $6x+3y+2z-18=0$. **B.** $x+2y+3z=0$.

C. $6x-3y+2z-18=0$. **D.** $6x+3y+2z-18=0$ hoặc $x+2y+3z=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $\left(P\right)\cap x'Ox=A\left(a,0,0\right);\left(P\right)\cap y'Oy=B\left(0,b,0\right);\left(P\right)\cap z'Oz=C\left(0,0,c\right),\left(abc\neq 0\right)$.

$M\left(1,2,3\right)$ làm trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}\dfrac{a}{3}=1\\ \dfrac{b}{3}=2\\ \dfrac{c}{3}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=6\\ c=9\end{cases}$.

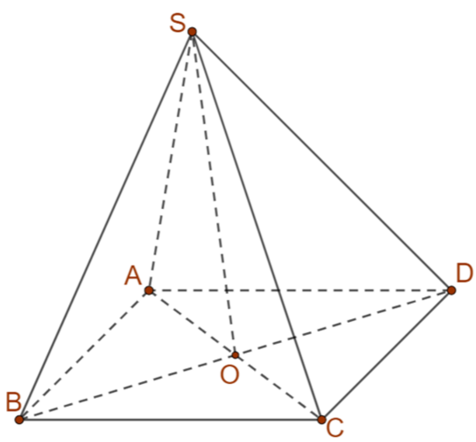
Do đó phương trình mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{9}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-18=0$.

Câu 27: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, biết thể tích khối chóp $S.OAD$ bằng $10cm^3$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng?

A. $20cm^3$. **B.** $30cm^3$. **C.** $25cm^3$. **D.** $40cm^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $S_{ABCD}=4S_{AOD}\Rightarrow V_{S.ABCD}=4V_{S.AOD}=4.10=40cm^3$.

Câu 28: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là?

A. $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]$. **C.** $\left[\frac{-2}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 4x \ge x-2 \Leftrightarrow 3x \ge -2 \Leftrightarrow x \ge \frac{-2}{3}$.

Câu 29: Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2023;2023]$ để đồ thị hàm số $y=\frac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên trái trục tung là:

A. 4046. **B.** 4044. **C.** 2022. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn C

Để đồ thị hàm số $y=\frac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên trái trục tung thì

$\begin{cases} -2m-4 \ne 0 \\ m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne -2 \\ m<0 \end{cases}$ mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2023;2023] \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2023;-2022;...-1\} \setminus \{-2\}$

Vậy có tất cả 2022 giá trị nguyên của m thỏa đề bài. Chọn đáp án C

Câu 30: Cho $\int_1^2 f(x)dx = 3$ và $\int_1^2 [3f(x)-g(x)]dx = 10$. Khi đó $\int_1^2 g(x)dx$ bằng:

A. 1. **B.** -4. **C.** 17. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Ta có, $\int_1^2 [3f(x)-g(x)]dx = 3\int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx = 10$

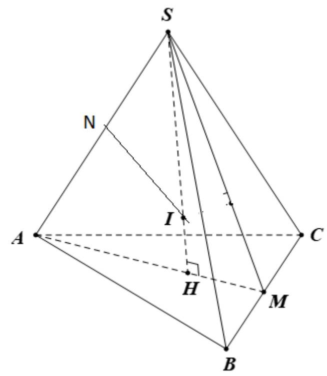
$\Leftrightarrow \int_1^2 g(x)dx = 10-3.3 = 1$.

Câu 31: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{\sqrt{6}a}{4}$ **B.** $\frac{3a}{5}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{5}$ **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$

Lời giải

Chọn D



Kẻ $SH\perp(ABC)$ tại H.

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Suy ra SH là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong mặt phẳng (SAH) kẻ đường trung trực của SA cắt SH tại I.

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bán kính $R=IS=\dfrac{SA^2}{2SH}=\dfrac{SA^2}{2\sqrt{SA^2-HA^2}}=\dfrac{2a^2}{2\sqrt{2a^2-\frac{3}{9}a^2}}=\dfrac{\sqrt{15}a}{5}$.

Câu 32: Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ là S. Tính S?

A. $S=4\ln\dfrac{4}{3}-1$ **B.** $S=\ln\dfrac{4}{3}-1$ **C.** $S=1-\ln\dfrac{4}{3}$ **D.** $S=4\ln\dfrac{4}{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\dfrac{-3x-1}{x-1}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{-3x-1}{x-1}$; $y=0; x=0; x=-\dfrac{1}{3}$ là

$$S=\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\left|\frac{-3x-1}{x-1}\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{3x+1}{x-1}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\left(3+\frac{4}{x-1}\right)\mathrm{d}x\right|$$

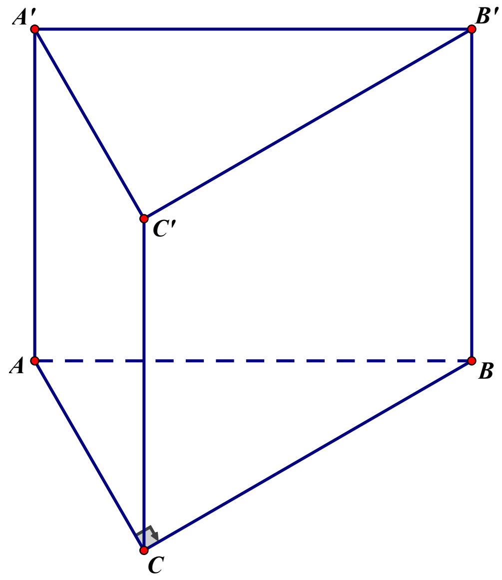
$$=\left|\left(3x+4\ln|x-1|\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{0}\right|=4\ln\frac{4}{3}-1$$

Câu 33: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $CA=CB=a$ và $AA'=6a$. Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $2a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** a^3. **D.** $6a^3$.

Lời giải

Chọn B



$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{1}{2}.CA.CB.AA' = \frac{1}{2}.a.a.6a = 3a^3$.

Câu 34: Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2+1\right)=2$ là

A. $S=\left\{\sqrt{3}\right\}$. **B.** $S=\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$. **C.** $S=\left\{-1;1\right\}$. **D.** $S=\left\{1\right\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $\log_2\left(x^2+1\right)=2 \Leftrightarrow x^2+1=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Câu 35: Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Tính xác suất để lấy được 2 quả cầu khác màu

A. $\frac{8}{11}$. **B.** $\frac{5}{11}$. **C.** $\frac{6}{11}$. **D.** $\frac{5}{22}$.

Lời giải

Chọn C

Số cách chọn 2 quả cầu từ hộp là: $n_\Omega = C_{11}^2$.

Gọi A là biến cố lấy được hai quả cầu cùng màu, khi đó $n_A = C_5^2 + C_6^2$.

Vậy xác suất để lấy được 2 quả cầu khác màu là: $1-P_A = 1-\frac{n_A}{n_\Omega} = 1-\frac{C_5^2+C_6^2}{C_{11}^2} = \frac{6}{11}$.

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\left|x^4-2x^2-3\right| = 2m-1$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt

A. $3<m<4$ **B.** $2<m<\frac{5}{2}$ **C.** $1<m<\frac{3}{2}$. **D.** $4<m<5$.

Lời giải

Chọn B

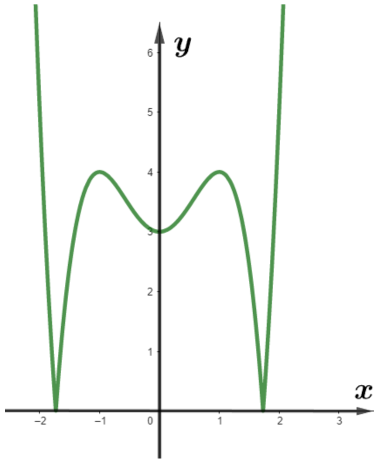
Xét hàm số $f\left(x\right)=x^4-2x^2-3$

$f'\left(x\right)=4x^3-4x$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y=f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta có đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2x^2-3\right|$



Để phương trình có 6 nghiệm phân biệt thì $3<2m-1<4 \Leftrightarrow 2<m<\dfrac{5}{2}$.

Câu 37: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của khối trụ ngoại tiếp, khối cầu nội tiếp, khối cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính giá trị $P=\dfrac{V_1+V_2}{V_3}$.

A. $P=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $P=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **C.** $P=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $P=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $V_1=\pi r^2 h=\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 .a=\dfrac{\pi a^3}{2}$.

$$V_2=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3=\frac{\pi a^3}{6}$$

$$V_3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$$

Do đó $P=\dfrac{V_1+V_2}{V_3}=\dfrac{\dfrac{\pi a^3}{2}+\dfrac{\pi a^3}{6}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để bất phương trình $\log_3 x^2+m\sqrt{\log_3 x^3}+m+1\le 0$ có không quá 20 nghiệm nguyên?

A. 23. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\ \log_3 x^3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^3\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1$.

Ta có: $\log_3 x^2+m\sqrt{\log_3 x^3}+m+1\le 0\Leftrightarrow 2\log_3 x+m\sqrt{3\log_3 x}+m+1\le 0$.

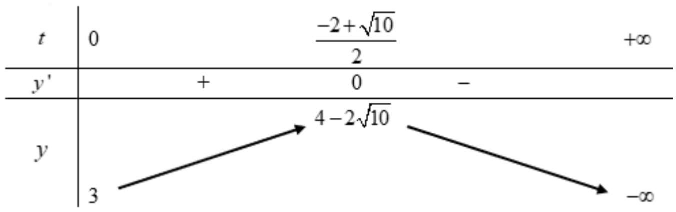
Đặt $\sqrt{3\log_3 x}=t\ (t\ge 0)\Rightarrow \log_3 x=\dfrac{t^2}{3}$.

Ta có bất phương trình $\dfrac{2}{3}t^2+mt+m+1\le 0\Leftrightarrow 3m\le\dfrac{-2t^2+3}{t+1}$.

Nhận xét: Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-2t^2+3}{t+1}$ trên $[0;+\infty)$ ta có:

$f'(t)=\dfrac{-2t^2+4t-3}{(t+1)^2}$. Giải phương trình $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-2-\sqrt{10}}{2}\,(L)\\ t=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}\,(TM)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Bất phương trình $\log_3 x^2+m\sqrt{\log_3 x^3}+m+1\le 0$ có không quá 20 nghiệm nguyên

$$\Leftrightarrow 3a>\frac{-6\log_3 21+3}{\sqrt{3\log_3 21}+1}\Leftrightarrow\frac{-2\log_3 21+1}{\sqrt{3\log_3 21}+1}\approx -1,685.$$

Tập các giá trị của m thỏa mãn là: $\{-1;0;...;20\}\Rightarrow$ Có 22 giá trị của m thỏa mãn.

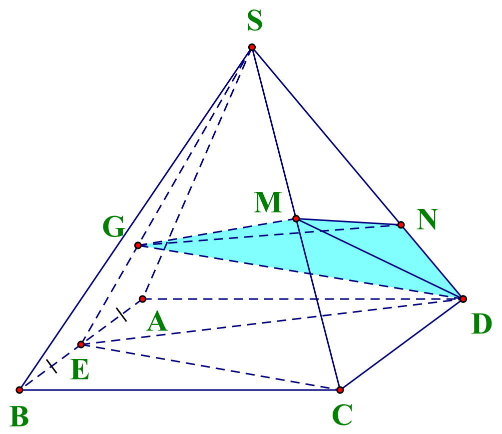
Câu 39: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là hai điểm nằm trên hai cạnh SC, SD sao cho $\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{SN}{ND}=2$, biết G là trọng tâm tam giác SAB. Tính tỉ số thể tích $\dfrac{V_{G.MND}}{V_{S.ABCD}}$.

A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** $\dfrac{1}{18}$. **C.** $\dfrac{1}{20}$. **D.** $\dfrac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi E là trung điểm cạnh AB; $\frac{SN}{ND}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{SN}{SD}=\frac{2}{3}$.



Ta có: $S_{\Delta ECD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ nên $V_{S.ECD}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Lại có: $V_{D.MNG}=\frac{ND}{SN}.V_{S.MNG}=\frac{1}{2}V_{S.MNG}$; khi đó

$V_{S.MNG}=\frac{SG}{SE}.\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD}.V_{S.CDE}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{1}{9}V_{S.ABCD}$ nên $V_{D.MNG}=\frac{1}{18}V_{S.ABCD}$.

Do vậy $\frac{V_{G.MND}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{18}$.

Câu 40: Biết $\int\limits_0^1\frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x=a-\ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+b^2$.

A. 13. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_0^1\frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(2+\frac{1-x}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x=2.(1-0)+\int\limits_0^1\left(\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$=2+\left(-\frac{2}{x+1}-\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=2+(1-\ln 2)=3-\ln 2$.

Do đó $a=3$ và $b=2$ nên $P=a^2+b^2=3^2+2^2=13$.

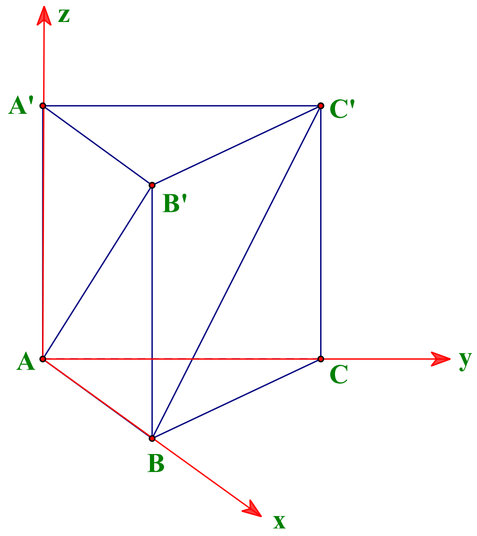
Câu 41: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB=AC=a$, $AA'=a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' theo a.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, chọn $a=1$.

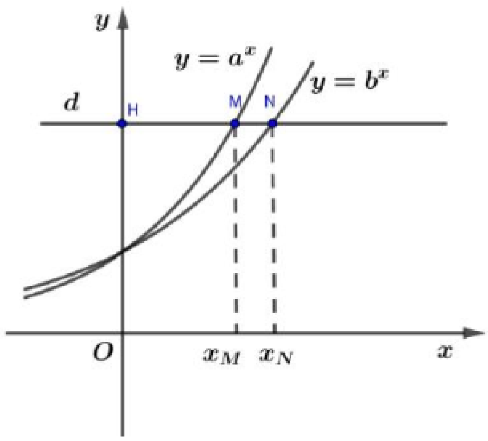


Khi đó ta được tọa độ các điểm $A(0;0;0)$, $B'\left(1;0;\sqrt{2}\right)$, $B(1;0;0)$ và $C'\left(0;1;\sqrt{2}\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}=(1;0;0)$, $\overrightarrow{AB'}=\left(1;0;\sqrt{2}\right)$ và $\overrightarrow{BC'}=\left(-1;1;\sqrt{2}\right)$; $\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right]=\left(-\sqrt{2};-2\sqrt{2};1\right)$.

Ta có: $d\left(AB',BC'\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right]\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$ hay $d\left(AB',BC'\right)=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Câu 42: Cho a,b là các số thực dương khác 1, đường thẳng d song song với trục hoành cắt trục tung, đồ thị hàm số $y=a^x, y=b^x$ lần lượt tại H,M,N (như hình bên). Biết $HM=3MN$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $b^4=a^3$. **<u>B.</u>** $b^3=a^4$. **C.** $3a=4b$. **D.** $4a=3b$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $HM=3MN$ nên suy ra $x_M=\dfrac{3}{4}x_N$.

Vì $y_M=y_N \Rightarrow a^{x_M}=b^{x_N} \Leftrightarrow a^{\frac{3}{4}x_N}=b^{x_N} \Leftrightarrow a^3=b^4$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6$. Điểm M thuộc mặt phẳng nào sau đây?

A. $2x-2y+6z-9=0.$ **B.** $2x+2y+6z+9=0.$

C. $2x-2y+6z+9=0.$ **D.** $2x-2y-6z+9=0.$

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x;y;z)$, khi đó ta có:

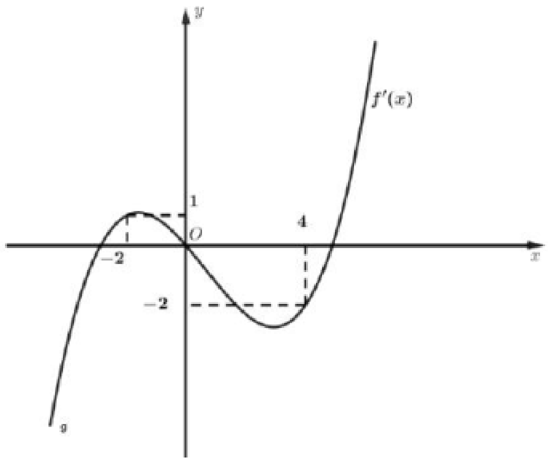
$$\begin{cases}\overrightarrow{OM}=(x;y;z)\\ \overrightarrow{AM}=(x-2;y+2;z-2)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z=6 \quad (*).$$

Mà ta có: $(S):x^2+y^2+(z+2)^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=-3-4z$

Nên thay vào (*) ta có:

$$-3-4z-2x+2y-2z=6\Leftrightarrow 2x-2y+6z+9=0.$$

Câu 44: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=4f(x^2-4)+x^4-8x^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. $3\cdot$ **B.** $5\cdot$ **C.** $4\cdot$ **D.** $7\cdot$

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=8x.f'(x^2-4)+4x^3-16x=8x\left(f'(x^2-4)+\dfrac{x^2-4}{2}\right)$.

Xét $f'(x)+\dfrac{x}{2}=0\Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{x}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Suy ra $f'(x)+\dfrac{x}{2}$ là đa thức bậc 3 có các nghiệm $x=-2,x=0,x=4$ nên có dạng

$$f'(x)+\frac{x}{2}=ax(x+2)(x-4),\left(a>0,\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty\right)$$

Do đó: $g'(x)=8ax(x^2-4+2)(x^2-4)(x^2-4-4)=8ax(x^2-2)(x^2-4)(x^2-8)$.

Ta thấy $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm 2\sqrt{2} \\ x=0 \end{array}\right.$ và $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua các điểm $x=-2\sqrt{2}, x=-\sqrt{2}, x=\sqrt{2}, x=2\sqrt{2}$ nên hàm số $g(x)$ đã cho có 4 điểm cực tiểu.

Câu 45: Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\cdot\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3<f(5)<4$. **B.** $1<f(5)<2$. **C.** $4<f(5)<5$. **D.** $2<f(5)<3$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ nên

$$f(x)=f'(x)\cdot\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \ln(f(x))=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C.$$

Vì $f(1)=1$ nên $C=-\frac{4}{3}$. Suy ra $\ln(f(x))=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3} \Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}}$.

Vậy $f(5)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\approx 3,794\in(3;4)$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x)=x\left[\sin x+f'(x)\right]+\cos x$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$. Giá trị của $f(\pi)$ bằng

A. $1+\frac{\pi}{2}$. **B.** $-1+\frac{\pi}{2}$. **C.** $1+\pi$. **D.** $-1+\pi$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ nên

$$f(x)=x\left[\sin x+f'(x)\right]+\cos x \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=-x\sin x-\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\frac{\cos x}{x}\right)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{\cos x}{x}+C.$$

Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ nên $C=1$. Suy ra $f(x)=\cos x+x$.

Vậy $f(\pi)=\pi-1$.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $\sqrt{x^3+1}\left[4xf'(1-x)-f(x)\right]=x^5$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ có kết quả dạng $\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$, (a, b, $c\in\mathbb{Z}^+$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Giá trị $T=a-2b+3c$ bằng:

A. 89. **B.** 27. **C.** 35. **D.** 81.

Lời giải

Chọn D

Thay $x=0$ vào $\sqrt{x^3+1}\left[4xf'(1-x)-f(x)\right]=x^5$, ta có $f(0)=0$.

$\sqrt{x^3+1}\left[4xf'(1-x)-f(x)\right]=x^5 \Leftrightarrow 4xf'(1-x)-f(x)=\dfrac{x^5}{\sqrt{x^3+1}}$

$\Rightarrow \int_0^1 4xf'(1-x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \dfrac{x^5}{\sqrt{x^3+1}}dx$

Xét tích phân $\int_0^1 4xf'(1-x)\,dx$

Ta có $\int_0^1 4xf'(1-x)\,dx=\int_0^1 4x\,d\left[-f(1-x)\right]=-4xf(1-x)\Big|_0^1+4\int_0^1 f(1-x)\,dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 4xf'(1-x)\,dx=-4f(0)+4\int_0^1 f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_0^1 4xf'(1-x)\,dx=4\int_0^1 f(x)\,dx$

Xét tích phân $\int_0^1 \dfrac{x^5}{\sqrt{x^3+1}}dx$

Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\Leftrightarrow t^2=x^3+1\Rightarrow \begin{cases}2t\,dt=3x^2dx\\ x=0\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}\end{cases}$, khi đó:

$\int_0^1 \dfrac{x^5}{\sqrt{x^3+1}}dx=\dfrac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)dt=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{9}$.

Khi đó $\int_0^1 4xf'(1-x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \dfrac{x^5}{\sqrt{x^3+1}}dx$

$\Leftrightarrow 3\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{9}\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{27}\Rightarrow \begin{cases}a=4\\ b=2\\ c=27\end{cases}\Rightarrow T=a-2b+3c=81$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)=2^x-2^{-x}+2023x^3$. Biết rằng tồn tại số thực m sao cho bất phương trình $f\left(4^x-mx+37m\right)+f\left((x-m-37)2^x\right)\geq 0$ có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây

A. $(50;70)$. **B.** $(-10;10)$. **C.** $(30;50)$. **D.** $(10;30)$.

Lời giải

Chọn C

$f\left(4^x-mx+37m\right)+f\left((x-m-37)2^x\right)\geq 0\Leftrightarrow f\left(4^x-mx+37m\right)\geq -f\left((x-m-37)2^x\right)$.

Ta thấy rằng $f(x)=2^x-2^{-x}+2023x^3$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=-f(-x)$ nên $f(x)$ là hàm lẻ, khi đó:

$f\left(4^x-mx+37m\right)\geq -f\left((x-m-37)2^x\right)\Leftrightarrow f\left(4^x-mx+37m\right)\geq f\left(-(x-m-37)2^x\right)$.

Mặc khắc $f(x)=2^x-2^{-x}+2023x^3$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ nên:

$\Leftrightarrow f\left(4^x - mx + 37m\right) \ge f\left(-\left(x - m - 37\right)2^x\right) \Leftrightarrow 4^x - mx + 37m \ge -\left(x - m - 37\right)2^x$

$\Leftrightarrow 4^x - mx + 37m \ge -2^x x + 2^x m + 37.2^x \Leftrightarrow -mx + 37m - 2^x m + 4^x + 2^x x - 37.2^x \ge 0$

$\Leftrightarrow m\left(-x + 37 - 2^x\right) - 2^x\left(-x + 37 - 2^x\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left(m - 2^x\right)\left(-x + 37 - 2^x\right) \ge 0$

Xét hàm số $h(x) = -x + 37 - 2^x$, ta có $h'(x) = -1 - 2^x \ln 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $h(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$. Nên phương trình $h(x) = 0$ có tối đa một nghiệm. Mà $h(5) = 0$ nên $x = 5$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Để $\left(m - 2^x\right)\left(-x + 37 - 2^x\right) \ge 0$ có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì phương trình $m - 2^x = 0$ có nghiệm $x = 5 \Leftrightarrow m = 32$.

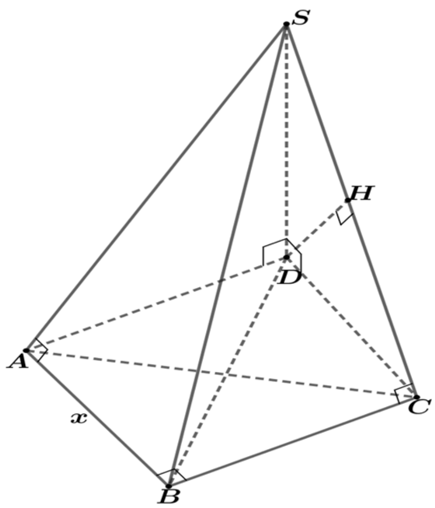
Thử lại ta thấy $m = 32$ thỏa.

Câu 49: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$. Khi độ dài cạnh AB thay đổi, thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $3\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Xác định điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình vuông, đặt $AB = x > 0$.
Theo giả thiết, ta có: $SD \perp (ABCD)$.

Kẻ $DH \perp SC \Rightarrow DH \perp (SBC)$ và $AD // BC \Rightarrow d_{(A;(SBC))} = d_{(D;(SBC))} = DH = a\sqrt{2}$.

Ta có: $SD = \frac{DC.DH}{\sqrt{DC^2 - DH^2}} = \frac{a\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}$ và $V_{S.ABC} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.\frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}$.

Xét hàm $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}, x > a\sqrt{2} \to f'(x) = \frac{2x^4 - 6a^2x^2}{\sqrt{\left(x^2 - 2a^2\right)^3}}$. Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = a\sqrt{3}$.

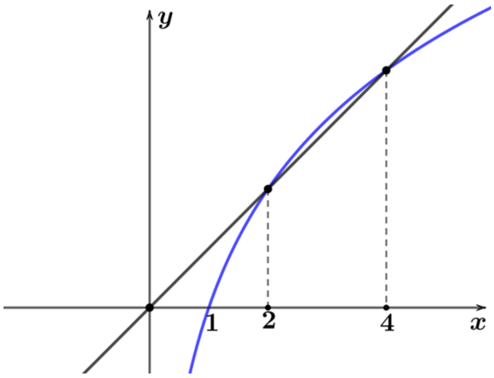
Từ đó ta có: $\min\limits_{\left(a\sqrt{2};+\infty\right)} f(x) = f\left(a\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3}a^2 \Rightarrow \min V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{6}a^3}{2}$.

Câu 50: Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ với x,y là các số nguyên thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $4.2^{y^4-2y^2}-2\log_2(2x)+x=0$ và $2\log_2(x+y)-x-y\ge 0$?

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B



Xét đồ thị 2 hàm số $y=2\log_2 x$ và $y=x$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Từ đó suy ra tập nghiệm chủa bất phương trình $2\log_2 x-x\ge 0\Leftrightarrow 2\le x\le 4$.

+ $2\log_2(x+y)-x-y\ge 0\Leftrightarrow 2\le x+y\le 4$ (1).

+ $4.2^{y^4-2y^2}-2\log_2(2x)+x=0\Leftrightarrow 2.2^{(y^2-1)^2}=2\log_2 x-x+2$.

Điều kiện có nghiệm: $2\log_2 x-x+2\ge 2\Leftrightarrow 2\le x\le 4$.

Với $x=2\Rightarrow 2.2^{(y^2-1)^2}=2\Rightarrow y=\pm 1$.

Với $x=3$ (loại), vì $VP=2\log_2 3-1\notin\mathbb{Z}$.

Với $x=4\Rightarrow 2.2^{(y^2-1)^2}=2\Rightarrow y=\pm 1$

Kết hợp với điều kiện (1), ta có 2 cặp số nguyên là $(2;1)$ và $(4;-1)$.