TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

(Đề thi gồm 06 trang)

ĐỀ THI KSCL LỚP 12 THEO ĐỊNH HƯỚNG THI TN THPT VÀ XÉT TUYỂN ĐH NĂM 2021-LẦN 1

Bài thi: Môn Toán

Thời gian làm bài: 90 phút

(50 câu trắc nghiệm)

Mã đề thi 132

Họ, tên thí sinh:... Số báo danh: ....

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AB và $B'D'$ bằng

A. 30^0. **B.** 135^0. **C.** 45^0. **D.** 90^0.

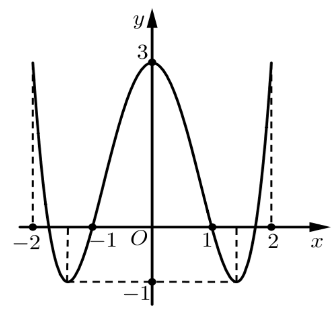
Câu 2: Biết $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$ và $\int_0^1 g(x)dx = \frac{4}{3}$. Khi đó $\int_0^1 \left(g(x) - f(x)\right)dx$ bằng

A. $-\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y = \log x + \log(3-x)$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $[3;+\infty)$. **D.** $[0;3]$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(-2;-1)$.

C. $(-1;0)$. **D.** $(-1;3)$.

Câu 5: Cho góc ở đỉnh của một hình nón bằng 60^0. Gọi r, h, l lần lượt là bán kính đáy, đường cao, đường sinh của hình nón đó. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $l = 2r$. **B.** $h = 2r$. **C.** $l = r$. **D.** $h = r$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $A(-1;-1;1)$ và nhận $\vec{u}(1;2;3)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}$. **B.** $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{1}$.

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}$. **D.** $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

Câu 7: Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$. **B.** $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$. **D.** $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Câu 8: Cho các số phức $z = 2+i$ và $w = 3-i$. Phần thực của số phức $z+w$ bằng

A. 0. **B.** -1. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 9: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là

A. $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$. **B.** $-\cos 3x + C$. **C.** $\cos 3x + C$. **D.** $\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Câu 10: Cho cấp số cộng (u_n), với $u_1 = 1$ và $u_3 = \dfrac{1}{3}$. Công sai của (u_n) bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $-\dfrac{1}{3}$. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên. Hỏi hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		-2		0		1		3		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 12: Chu vi đường tròn lớn của mặt cầu $S(O;\, R)$ là

A. πR^2. **B.** $4\pi R^2$. **C.** πR. **D.** $2\pi R$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;\, 3]$ bằng

x	-3		-2		0		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	8

A. 0. **B.** 8.
C. 1. **D.** 3.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}(3;\, 2;\, 5)$, $\vec{v}(4;\, 1;\, 3)$. Tọa độ của $\vec{u} - \vec{v}$ là

A. $(1;\, -1;\, 2)$. **B.** $(1;\, -1;\, -2)$. **C.** $(-1;\, 1;\, -2)$. **D.** $(-1;\, 1;\, 2)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oyz) là

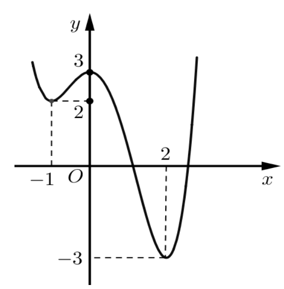
A. $\vec{i}(1;\, 0;\, 0)$. **B.** $\vec{n}(0;\, 1;\, 1)$. **C.** $\vec{j}(0;\, 1;\, 0)$. **D.** $\vec{k}(0;\, 0;\, 1)$.

Câu 16: Nghiệm của phương trình $2^{x-1} = 8$ là

A. $x = 3$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 4$. **D.** $x = 5$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hỏi phương trình $2f(x) = 5$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $[-1;\, 2]$?

A. 4. **B.** 2.
C. 3. **D.** 1.



Câu 18: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Môđun của số phức $(2\overline{z_1} - 3)(2\overline{z_2} - 3)$ bằng

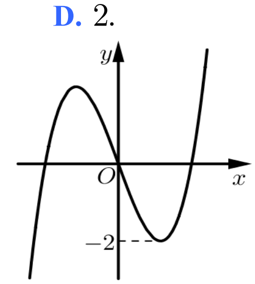
A. 29. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 11.

Câu 19: Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x^3 - 3x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 20: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(x^2) + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 6. **B.** 3.
C. 4. **D.** 2.



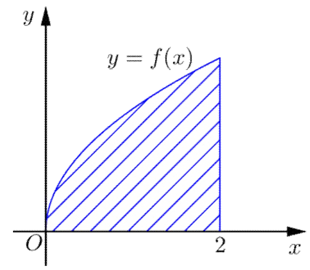
Câu 21: Một khối trụ có đường cao bằng 2, chu vi của thiết diện qua trục gấp 3 lần đường kính đáy. Thể tích của khối trụ đó bằng

A. 2π. **B.** 32π. **C.** $\frac{8\pi}{3}$. **D.** 8π.

Câu 22: Đạo hàm của hàm số $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ là

A. $\frac{2^{x+1}\ln 2}{(2^x+1)^2}$. **B.** $\frac{2^x\ln 2}{(2^x+1)^2}$. **C.** $\frac{2^{x+1}}{(2^x+1)^2}$. **D.** $\frac{2^x}{(2^x+1)^2}$.

Câu 23: Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0;+\infty)$ và diện tích phần hình phẳng được kẻ sọc ở hình bên bằng 3. Tích phân $\int_0^1 f(2x)dx$ bằng



A. $\frac{4}{3}$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 24: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, O là tâm của mặt đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SO và CD bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\sqrt{2}a$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(P):x+y-z=0$. **B.** $(\beta):x+z=0$.

C. $(Q):x+y+2z=0$. **D.** $(\alpha):x-y+1=0$.

Câu 26: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^{2x-1}$ là

A. $\frac{9^x}{3}+C$. **B.** $\frac{9^x}{3\ln 3}+C$. **C.** $\frac{9^x}{6\ln 3}+C$. **D.** $\frac{9^x}{6}+C$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{3x+1}$. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x=1$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 2.

Câu 28: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2(a+b)=3+\log_2(ab)$. Giá trị $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** 8.

Câu 29: Cho khối lăng tam giác $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA'=2a$ và tạo mặt phẳng đáy một góc bằng 60^0, diện tích tam giác ABC bằng a^2. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** a^3. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 30: Phương trình $\cos 2x = -\frac{1}{3}$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $\left(0;\ \frac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x+y+z+1=0$ và $(\beta): x+2y+3z+4=0$. Một vectơ chỉ phương của Δ có tọa độ là

A. $(2;-1;-1)$. **B.** $(1;-1;0)$. **C.** $(1;1;-1)$. **D.** $(1;-2;1)$.

Câu 32: Hàm số $f(x) = x^4(x-1)^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 33: Một tổ học sinh có 12 bạn, gồm 7 nam và 5 nữ. Cần chọn một nhóm 3 học sinh của tổ đó để làm vệ sinh lớp học. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong nhóm có cả nam và nữ ?

A. 22. **B.** 175. **C.** 43. **D.** 350.

Câu 34: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = 3x + m\sqrt{x^2+1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 2.

Câu 35: Giả sử $f(x)$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $G(x) = x^3$ là một nguyên hàm của $g(x) = e^{-2x}f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Họ tất cả các nguyên hàm của $e^{-2x}f'(x)$ là

A. $-2x^3+3x^2+C$. **B.** $2x^3+3x^2+C$. **C.** x^3+3x^2+C. **D.** $-x^3+3x^2+C$.

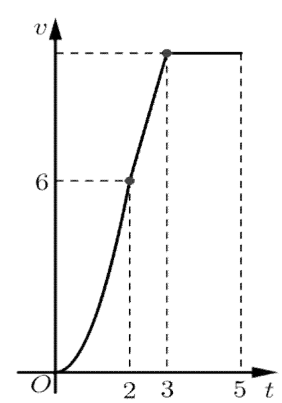
Câu 36: Có bao nhiêu số phức z đôi một khác nhau thỏa mãn $|z+i| = 2$ và $(z-2)^4$ là số thực?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 37: Có 10 học sinh, gồm 5 bạn lớp $12A$ và 5 bạn lớp $12B$ tham gia một trò chơi. Để thực hiện trò chơi, người điều khiển ghép ngẫu nhiên 10 học sinh đó thành 5 cặp. Xác suất để không có cặp nào gồm hai học sinh cùng lớp bằng

A. $\frac{4}{63}$. **B.** $\frac{1}{63}$. **C.** $\frac{2}{63}$. **D.** $\frac{8}{63}$.

Câu 38: Một chiếc xe đua F_1 đạt tới vận tốc lớn nhất là 360 km/h. Đồ thị bên biểu thị vận tốc v của xe trong 5 giây đầu tiên kể từ lúc xuất phát. Đồ thị trong 2 giây đầu là một phần của một parabol đỉnh tại gốc tọa độ O, giây tiếp theo là đoạn thẳng và sau đúng ba giây thì xe đạt vận tốc lớn nhất. Biết rằng mỗi đơn vị trục hoành biểu thị 1 giây, mỗi đơn vị trục tung biểu thị 10 m/s và trong 5 giây đầu xe chuyển động theo đường thẳng. Hỏi trong 5 giây đó xe đã đi được quãng đường là bao nhiêu?



A. 340 (mét). **B.** 420 (mét). **C.** 400 (mét). **D.** 320 (mét).

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) vuông góc với $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ và (α) cắt trục Ox, trục Oy và tia Oz lần lượt tại M, N, P. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OMNP$ bằng 6. Mặt phẳng (α) đi qua điểm nào sau đây?

A. $B(1;-1;1)$. **B.** $A(1;-1;-3)$. **C.** $C(1;-1;2)$. **D.** $D(1;-1;-2)$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = BC = 2a$. Tam giác SAC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC), $SA = \sqrt{3}a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng

A. 60^0. **B.** 30^0. **C.** 45^0. **D.** 90^0.

Câu 41: Cho đồ thị $(C): y = \dfrac{x}{x-1}$. Đường thẳng d đi qua điểm $I(1;\,1)$, cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Khi diện tích tam giác MAB, với $M(0;\,3)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì độ dài đoạn AB bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

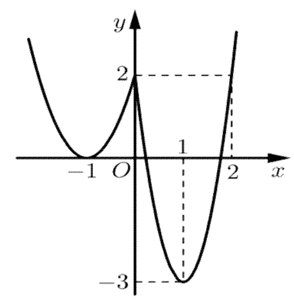
Câu 42: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = 2a$, $AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^0$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{30}a}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}a}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{30}a}{10}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{33}a}{3}$.

Câu 43: Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $6^x - 2^x - 3^x = \dfrac{a}{5}$ có hai nghiệm thực phân biệt ?

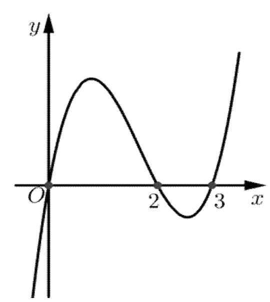
A. 4. **B.** 5. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 44: Cho hai hàm số $u(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$ và $f(x)$, trong đó đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(u(x)\right) = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?



A. 4. **B.** 3.
C. 2. **D.** 1.

Câu 45: Giả sử $f(x)$ là một đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y = f'(1-x)$ được cho như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(1;\,2)$. **B.** $(-2;\,-1)$. **C.** $(0;\,1)$. **D.** $(-1;\,0)$.

Câu 46: Giả sử $f(x)$ là hàm có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;\,\pi)$ và $f'(x)\sin x = x + f(x)\cos x, \forall x \in (0;\,\pi)$. Biết $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1, f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{12}\left(a + b\ln 2 + c\pi\sqrt{3}\right)$, với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên. Giá trị $a + b + c$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 11. **D.** -11.

Câu 47: Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $z^2 - (a-3)z + a^2 + a = 0$ có hai nghiệm phức $z_1,\ z_2$ thỏa mãn $\left|z_1 + z_2\right| = \left|z_1 - z_2\right|$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh $\sqrt{3}a$, ABC là tam giác vuông tại A có cạnh $AC = a$, góc giữa AD và (SAB) bằng 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. a^3. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 49: Xét tất cả các số thực dương x, y thỏa mãn $\dfrac{x+y}{10} + \log\left(\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2y}\right) = 1 + 2xy$.

Khi biểu thức $\dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất, tích xy bằng

A. $\dfrac{9}{100}$. **B.** $\dfrac{9}{200}$. **C.** $\dfrac{1}{64}$. **D.** $\dfrac{1}{32}$.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 24$ cắt mặt phẳng $(\alpha): x + y = 0$ theo giao tuyến là đường tròn (C). Tìm hoành độ của điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho khoảng cách từ M đến $A(6; -10; 3)$ lớn nhất.

A. -1. **B.** -4. **C.** 2. **D.** -5.

----------- HẾT ----------

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ LẦN 1 NĂM 2021 - MÔN TOÁN

Câu	Mã 132	Mã 209	Mã 357	Mã 485
1	C	A	B	A
2	D	D	B	D
3	B	D	C	D
4	C	C	A	A
5	A	C	D	B
6	C	A	B	C
7	A	C	B	D
8	C	A	C	B
9	A	C	D	D
10	B	B	B	A
11	D	A	B	D
12	D	B	A	C
13	B	D	C	C
14	D	A	D	B
15	A	D	C	D
16	C	C	A	C
17	B	D	D	B
18	D	D	A	B
19	B	D	A	B
20	C	A	C	C
21	D	D	B	A
22	A	D	D	B
23	D	A	B	D
24	A	A	C	C
25	C	B	D	B
26	C	C	A	D
27	B	C	B	A
28	D	D	B	C
29	C	B	C	A
30	B	C	A	B
31	D	A	D	C
32	A	B	C	C
33	B	C	A	D
34	C	D	A	A
35	B	B	C	C
36	B	B	D	B
37	D	D	C	B
38	D	C	A	A
39	A	A	B	A
40	A	B	D	A
41	A	A	B	D
42	A	B	C	C
43	A	C	A	B
44	B	A	A	D
45	D	B	C	D
46	A	B	B	A
47	A	C	D	A
48	C	B	B	C
49	C	B	D	D
50	B	A	D	D

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	**2. D**	**3. B**	**4. C**	**5. A**	**6. A**	**7. A**	**8. C**	**9. A**	**10. B**
11. A	**12. D**	**13. B**	**14. D**	**15. D**	**16. C**	**17. B**	**18. D**	**19. B**	**20. C**
21. D	**22. A**	**23. D**	**24. A**	**25. A**	**26. C**	**27. B**	**28. D**	**29. C**	**30. B**
31. D	**32. A**	**33. B**	**34. C**	**35. C**	**36. B**	**37. D**	**38. D**	**39. A**	**40. A**
41. A	**42. A**	**43. A**	**44. B**	**45. D**	**46. A**	**47. B**	**48. C**	**49. C**	**50. B**

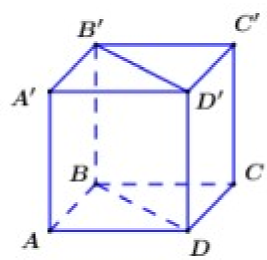
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1 (NB)

Phương pháp:

Sử dụng: $a//a' \Rightarrow \angle(a;b) = \angle(a';b')$

Cách giải:



Ta có $B'D'//BD$ nên $\angle(AB;B'D') = \angle(AB;BD)$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\angle ABD = 45^0$.

Vậy $\angle(AB;B'D') = 45^0$.

Chọn C.

Câu 2 (NB)

Phương pháp:

Sử dụng tính chất tích phân: $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

Cách giải:

$$\int_0^1 [g(x) - f(x)]dx = \int_0^1 g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1.$$

Chọn D.

Câu 3 (NB)

Phương pháp:

Hàm số $y = \log x$ xác định khi $x > 0$.

Cách giải:

Hàm số $y = \log x + \log(3 - x)$ xác định khi $\begin{cases} x > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 3.$

Chọn B.

Câu 4 (NB)

Phương pháp:

Dựa vào đồ thị xác định các khoảng đồ thị đi lên từ trái qua phải.

Cách giải:

Dựa vào đồ thị và các đáp án ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-1;0)$.

Chọn C.

Câu 5 (TH)

Phương pháp:

- Cho góc ở đỉnh của một hình nón bằng α thì $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{h}$ với r, h lần lượt là bán kính đáy, đường cao của hình nón.

- Sử dụng công thức: $l^2 = h^2 + r^2$.

Cách giải:

Vì góc ở đỉnh của một hình nón bằng 60^0 nên $\tan 30^0 = \frac{r}{h} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{h} \Leftrightarrow h = \sqrt{3}r.$

Lại có $l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow l^2 = 3r^2 + r^2 \Leftrightarrow l = 2r.$

Chọn A.

Câu 6 (NB)

Phương pháp:

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $A(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u}(a;b;c)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$.

Cách giải:

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $A(-1;-1;1)$ và nhận $\vec{u}(1;2;3)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là: $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 1}{3}$.

Chọn A.

Câu 7 (NB)

Phương pháp:

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$.

Cách giải:

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$. Với $k = 0$ ta có hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \supset \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Vậy hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

Chọn A.

Câu 8 (NB)

Phương pháp:

Thực hiện phép cộng số phức.

Cách giải:

Ta có $z + \mathrm{w} = 2 + i + 3 - i = 5$ có phần thực bằng 5.

Chọn C.

Câu 9 (NB)

Phương pháp:

Sử dụng: $\int \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$.

Cách giải:

$\int f(x)dx = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Chọn A.

Câu 10 (NB)

Phương pháp:

Sử dụng công thức SHTQ của cấp số cộng có số hạng đầu u_1, công sai d là $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Cách giải:

Ta có $u_3 = u_1 + 2d \Leftrightarrow d = \frac{u_3 - u_1}{2} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{2} = \frac{-1}{3}$.

Chọn B.

Câu 11 (NB)

Phương pháp:

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm xác định các điểm mà qua đó đạo hàm đổi dấu.

Cách giải:

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị $x=-2, x=1, x=6$.

Chọn A.

Câu 12 (NB)

Phương pháp:

Đường tròn lớn của mặt cầu $S\left(O;R\right)$ là có bán kính R.

Cách giải:

Đường tròn lớn của mặt cầu $S\left(O;R\right)$ là có bán kính R nên có chu vì là $2\pi R$.

Chọn D.

Câu 13 (NB)

Phương pháp:

Dựa vào BBT xác định điểm có tung độ lớn nhất trên $\left[-3;3\right]$.

Cách giải:

Dựa vào BBT ta thấy $\max\limits_{[-3;3]} y = y\left(3\right) = 8$.

Chọn B.

Câu 14 (NB)

Phương pháp:

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}\left(x_1;y_1;z_1\right)$ và $\vec{v}\left(x_2;y_2;z_2\right) \Rightarrow \vec{u}-\vec{v}=\left(x_1-x_2;y_1-y_2;z_1-z_2\right)$.

Cách giải:

$\vec{u}-\vec{v}=\left(-1;1;2\right)$.

Chọn D.

Câu 15 (NB)

Phương pháp:

Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(Oyz\right)$ là $\vec{k}\left(0;0;1\right)$.

Cách giải:

Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oyz) là $\vec{k}(0;0;1)$.

Chọn D.

Câu 16 (NB)

Phương pháp:

Đưa về cùng cơ số.

Cách giải:

$2^{x-1}=8 \Leftrightarrow 2^{x-1}=2^3 \Leftrightarrow x-1=3 \Leftrightarrow x=4.$

Chọn C.

Câu 17 (TH)

Phương pháp:

Số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

Cách giải:

Ta có $2f(x)=5 \Leftrightarrow f(x)=\frac{5}{2}$.

Số nghiệm của phương trình $f(x)=\frac{5}{2}$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\frac{5}{2}$.

Dựa vào BBT ta thấy đường thẳng $y=\frac{5}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 2 điểm có hoành độ thuộc $[-1;2]$.

Vậy phương trình $2f(x)=5$ có 2 nghiệm trên đoạn $[-1;2]$.

Chọn B.

Câu 18 (TH)

Phương pháp:

- Thực hiện phép nhân số phức.

- Sử dụng tính chất: $\overline{z_1}.\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}, \overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}$.

Cách giải:

Ta có:

$\left(2\overline{z_1}-3\right)\left(2\overline{z_2}-3\right)$

$=4\overline{z_1}.\overline{z_2}-6\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)+9$

$=4\overline{z_1z_2}-6\overline{z_1+z_2}+9$

Vì z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-3z+5=0$ nên $z_1z_2=5, z_1+z_2=3$.

Vậy $\left(2\overline{z_1}-3\right)\left(2\overline{z_2}-3\right)=4\overline{z_1z_2}-6\overline{z_1+z_2}+9=4.5-6.3+9=11$.

Chọn D.

Câu 19 (TH)

Phương pháp:

- Đồ thị hàm phân thức hữu tỷ có bậc tử < bậc mẫu luôn có 1 TCN $y=0$.

- Số TCĐ = số nghiệm của phương trình mẫu số không bị triệt tiêu bởi phương trình tử số.

Cách giải:

Hàm số $y=\dfrac{x+3}{x^3-3x}$ có bậc tử < bậc mẫu nên đồ thị hàm số luôn có 1 TCN $y=0$.

Xét $x^3-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\neq-3\\x=\pm\sqrt{3}\neq-3\end{array}\right.$ nên đồ thị hàm số có 3 TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x^3-3x}$ có 4 đường tiệm cận.

Chọn B.

Câu 20 (TH)

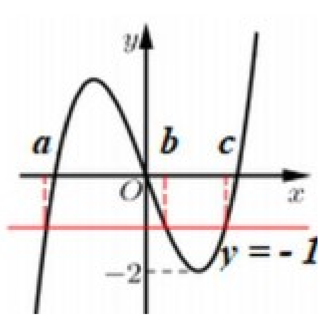
Phương pháp:

- Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=m$.

- Tìm nghiệm x^2, từ đó tìm nghiệm x.

Cách giải:

Ta có: $f\left(x^2\right)+1=0\Leftrightarrow f\left(x^2\right)=-1$, số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=-1$.



Dựa vào đồ thị ta thấy $f\left(x^2\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=a<0\left(Vo\ nghiem\right)\\x^2=b>0\\x^2=c>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{b}\\x=\pm\sqrt{c}\end{array}\right.$.

Vậy phương trình $f\left(x^2\right)+1=0$ có 4 nghiệm.

Chọn C.

Chú ý khi giải: Đề bài yêu cầu tìm nghiệm của phương trình $f\left(x^2\right)+1=0,$ là tìm nghiệm x chứa không tìm nghiệm x^2.

Câu 21 (TH)

Phương pháp:

- Gọi bán kính đáy hình trụ là r. Thiết diện qua trục là hình chữ nhật có kích thước $h\times 2r$.

- Dựa vào giả thiết: chu vi thiết diện qua trục gấp 3 lần đường kính đáy tìm r.

- Thể tích khối trụ có chiều cao h, bán kính đáy r là $V=\pi r^2 h.$

Cách giải:

Gọi bán kính đáy hình trụ là r. Thiết diện qua trục là hình chữ nhật có kích thước $h\times 2r$ với $h=2.$

Vì chu vi thiết diện qua trục gấp 3 lần đường kính đáy nên ta có phương trình: $2\left(h+2r\right)=3.2r\Leftrightarrow h=r=2.$

Vậy thể tích của khối trụ đó bằng: $V=\pi r^2 h=\pi.2^2.2=8\pi.$

Chọn D.

Câu 22 (TH)

Phương pháp:

- Sử dụng công thức tính đạo hàm: $\left(a^x\right)'=a^x\ln a.$

- Sử dụng quy tắc tính đạo hàm của 1 thương: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Cách giải:

$$f\left(x\right)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{2^x\ln 2\left(2^x+1\right)-\left(2^x-1\right)2^x\ln 2}{\left(2^x+1\right)^2}$$

$$f'\left(x\right)=\frac{2^x\ln 2\left(2^x+1-2^x+1\right)}{\left(2^x+1\right)^2}$$

$$f'\left(x\right)=\frac{2^x\ln 2.2.2^x}{\left(2^x+1\right)^2}$$

$f'(x)=\dfrac{2^{2x+1}\ln 2}{\left(2^x+1\right)^2}$

Chọn A.

Câu 23 (TH)

Phương pháp:

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a, x=b$ là $S=\int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx.$

- Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số.

Cách giải:

Vì diện tích hình phẳng được kẻ sọc bằng 3 nên $\int\limits_0^2 f(x)dx=3$ (do $f(x)\ge 0 \forall x\in[0;2]$)

Đặt $t=2x$ ta có $dt=2dx.$ Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=1\Rightarrow t=2 \end{cases}.$

Khi đó $\int\limits_0^1 f(2x)dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)dt=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x)dx=\dfrac{3}{2}.$

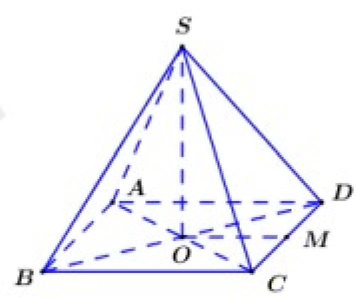
Chọn D.

Câu 24 (TH

Phương pháp:

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng độ dài đoạn vuông góc chung của hai đoạn thẳng đó.

Cách giải:



Gọi M là trung điểm của $CD.$ Ta có $\begin{cases} OM\perp SO \\ OM\perp CD \end{cases}\Rightarrow OM$ là đoạn vuông góc chung của SO và $CD.$

$\Rightarrow d(SO;CD)=OM=\dfrac{a}{2}.$

Chọn A.

Câu 25 (TH)

Phương pháp:

Sử dụng: $d//(P) \Rightarrow \overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{n_P}$ cùng phương.

Cách giải:

Đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$ có 1 VTCP là $\vec{u} = (1;1;-1)$.

Mặt phẳng $(P): x + y - z = 0$ có 1 VTPT là $\vec{n} = (1;1;-1) = \vec{u}$ nên $\Delta//(P)$.

Chọn A.

Câu 26 (TH)

Phương pháp:

Sử dụng công thức tính nguyên hàm: $\int a^{mx+n}dx = \frac{a^{mx+n}}{m\ln a} + C.$

Cách giải:

$\int f(x)dx = \int 3^{2x-1}dx = \frac{3^{2x-1}}{\ln 3} + C = \frac{9^x}{6\ln 3} + C.$

Chọn C.

Câu 27 (TH)

Phương pháp:

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = x_0$ là $k = f'(x_0)$.

Cách giải:

TXĐ: $D = \left[-\frac{1}{3};+\infty\right).$

Ta có $f(x) = \sqrt{3x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.

Vậy hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 1$ là: $k = f'(1) = \frac{3}{4}$.

Chọn B.

Câu 28 (TH)

Phương pháp:

Chuyển vế, sử dụng công thức $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}(0 < a \ne 1; x, y > 0)$.

Cách giải:

Ta có:

$\log_2(a+b)=3+\log_2(ab)$

$\Leftrightarrow \log_2(a+b)-\log_2(ab)=3$

$\Leftrightarrow \log_2\dfrac{a+b}{ab}=3$

$\Leftrightarrow \dfrac{a+b}{ab}=2^3=8$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=8$

Chọn D.

Câu 29 (TH)

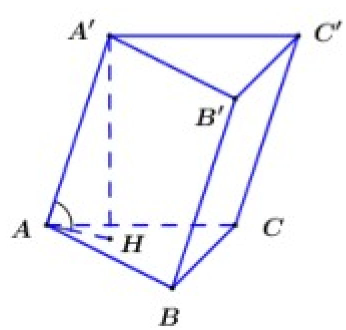
Phương pháp:

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC). Xác định góc giữa AA' và (ABC) là góc giữa AA' và hình chiếu của AA' lên (ABC).

- Sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông tính $A'H$.

- Tính $V_{ABC.A'B'C'}=A'H.S_{\Delta ABC}$.

Cách giải:



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên $(ABC)\Rightarrow AH$ là hình chiếu vuông góc của AA' lên (ABC).

$\Rightarrow \angle(AA';(ABC))=\angle(AA';AH)=\angle A'AH=60^0$.

Xét tam giác vuông $A'AH$ có $A'H=AA'.\sin 60^0=2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=A'H.S_{\Delta ABC}=a\sqrt{3}.a^2=\sqrt{3}a^3$.

Chọn C.

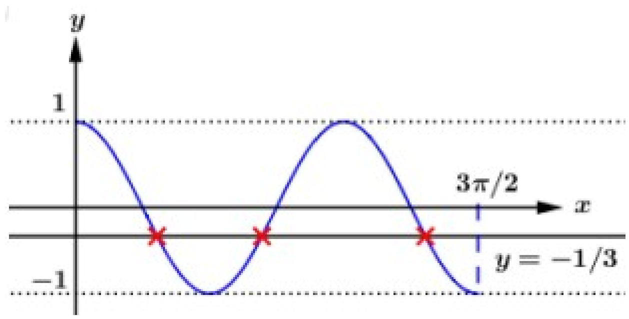
Câu 30 (TH)

Phương pháp:

Số nghiệm của phương trình $\cos 2x = -\frac{1}{3}$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cos 2x$ và đường thẳng $y = -\frac{1}{3}$.

Cách giải:

Ta có đồ thị:



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $\cos 2x = -\frac{1}{3}$ có 3 nghiệm trên khoảng $\left(0;\frac{3\pi}{2}\right)$.

Chọn B.

Câu 31 (TH)

Phương pháp:

Sử dụng: $\begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \\ \overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{n_\beta} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}\right]$.

Cách giải:

Gọi $\overrightarrow{u_\Delta}$ là 1 VTCP của đường thẳng Δ.

$\overrightarrow{n_\alpha} = (1;1;1), \overrightarrow{n_\beta} = (1;2;3)$ lần lượt là 1 VTPT của mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$.

Vì $\Delta = (\alpha) \cap (\beta) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \\ \overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{n_\beta} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}\right] = (1;-2;1)$.

Chọn D.

Câu 32 (TH)

Phương pháp:

- Tính $f'(x)$.

- Giải phương trình $f'(x) = 0$ xác định số nghiệm bội lẻ.

Cách giải:

Ta có:

$f(x)=x^4(x-1)^2$

$\Rightarrow f'(x)=4x^3(x-1)^2+x^4.2(x-1)$

$f'(x)=2x^3(x-1)\left[2(x-1)+x\right]$

$f'(x)=2x^3(x-1)(3x-2)$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\,(nghiem\ boi\ 3)\\x=1\,(nghiem\ don)\\x=\dfrac{2}{3}\,(nghiem\ don)\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị.

Chọn A.

Câu 33 (TH)

Phương pháp:

Xét các TH:

- Chọn được 1 nam và 2 nữ.
- Chọn được 2 nam và 1 nữ.

Sử dụng tổ hợp và quy tắc cộng, nhân

Cách giải:

Để chọn sao cho trong nhóm có cả nam và nữ ta có các TH sau:

TH1: Chọn được 1 nam và 2 nữ $\Rightarrow$ Có $C_7^1.C_5^2=70$ cách.

TH2: Chọn được 2 nam và 1 nữ $\Rightarrow$ Có $C_7^2.C_5^1=105$ cách.

Vậy để chọn một nhóm 3 học sinh sao cho trong nhóm có cả nam và nữ có $70+105=175$ cách.

Chọn B.

Câu 34 (VD)

Phương pháp:

- Tính đạo hàm $f'(x)$.
- Để hàm số $f(x)=3x+m\sqrt{x^2+1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x)\ge 0\forall x\in\mathbb{R}$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.
- Chia TH của x, cô lập m.

- Giải các bất phương trình: $\begin{cases} m \ge f(x)\,\forall x \in [a;b] \Rightarrow m \ge \max\limits_{[a;b]} f(x) \\ m \le f(x)\,\forall x \in [a;b] \Rightarrow m \le \min\limits_{[a;b]} f(x) \end{cases}$

Cách giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có $f(x) = 3x + m\sqrt{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = 3 + \dfrac{mx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Để hàm số $f(x) = 3x + m\sqrt{x^2+1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

$\Leftrightarrow 3 + \dfrac{mx}{\sqrt{x^2+1}} \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{3\sqrt{x^2+1} + mx}{\sqrt{x^2+1}} \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+1} + mx \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow mx \ge -3\sqrt{x^2+1}\ \forall x \in \mathbb{R}$

TH1: $x = 0 \Rightarrow 0 \ge -3$ (luôn đúng).

TH2: $x > 0 \Rightarrow m \ge \dfrac{-3\sqrt{x^2+1}}{x} = f(x) \Rightarrow m \ge \max\limits_{(0;+\infty)} f(x)\ (1)$.

TH3: $x < 0 \Rightarrow m \le \dfrac{-3\sqrt{x^2+1}}{x} = f(x) \Rightarrow m \le \min\limits_{(0;+\infty)} f(x)\ (2)$.

Xét hàm số $f(x) = -\dfrac{3\sqrt{x^2+1}}{x}\,(x \ne 0)$ ta có $f'(x) = \dfrac{\dfrac{-3x}{\sqrt{x^2+1}}x + 3\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \dfrac{3}{x^2\sqrt{x^2+1}} > 0\ \forall x \ne 0$.

BBT:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$			$+\infty$ $\|\|$		-3
		↗	$\|\|$	↗	
	3		$\|\|$ $-\infty$		

Dựa vào BBT ta thấy $(1) \Leftrightarrow m \ge -3, (2) \Leftrightarrow m \le 3 \Rightarrow -3 \le m \le 3$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn C.

Câu 35 (VD)

Phương pháp:

- Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

- Sử dụng: $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ nên $\begin{cases}\int f\left(x\right)dx=F\left(x\right)+C\\ f\left(x\right)=F'\left(x\right)\end{cases}$

Cách giải:

Xét $I=\int e^{-2x}f'\left(x\right)dx.$

Đặt $\begin{cases}u=e^{-2x}\\ dv=f'\left(x\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-2e^{-2x}dx\\ v=f\left(x\right)\end{cases}$

$\Rightarrow I=e^{-2x}f\left(x\right)+2\int e^{-2x}f\left(x\right)dx.$

Vì $G\left(x\right)=x^3$ là một nguyên hàm của $g\left(x\right)=e^{-2x}f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ nên $\begin{cases}\int e^{-2x}f\left(x\right)dx=G\left(x\right)+C=x^3+C\\ e^{-2x}f\left(x\right)=G'\left(x\right)=3x^2\end{cases}$

$\Rightarrow I=x^3+3x^2+C.$

Chọn C.

Câu 36 (VDC)

Phương pháp:

- Từ giả thiết $\left|z+i\right|=2$ suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z.

- Từ giả thiết $\left(z-2\right)^4$ là số thực chứng minh hoặc $z-2$ là số thực, hoặc $z-2$ là số thuần ảo, hoặc $z-2$ có phần thực bằng cộng trừ phần ảo.

- Sử dụng phương pháp hình học.

Cách giải:

Vì $\left|z+i\right|=2\Rightarrow\left|z-\left(-i\right)\right|=2$ nên tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(0;-1\right)$, bán kính $R=2.$

Gọi $z-2=x+yi$ ta có:

$\left(z-2\right)^2=\left(x+yi\right)^4=\left(x^2-y^2+2xyi\right)^2$

$=\left(x^2-y^2\right)^2+4xy\left(x^2-y^2\right)i-4x^2y^2$

$=x^4-8x^2y^2+y^4+4xy\left(x^2-y^2\right)i$

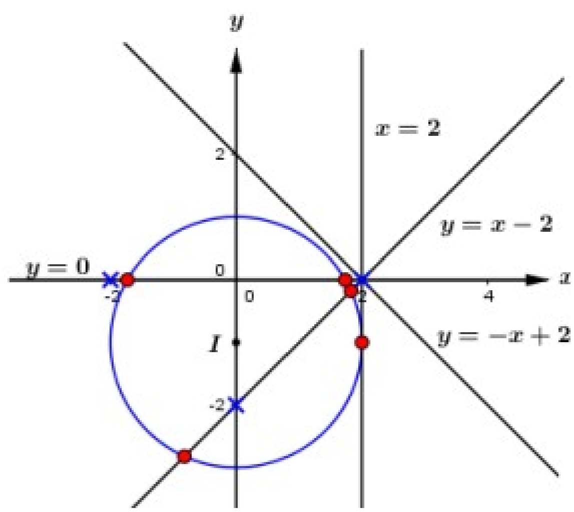
Vì $(z-2)^2$ là số thực nên $4xy\left(x^2-y^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\y=0\\|x|=|y|\end{array}\right.$

TH1: $x=0 \Rightarrow z-2=yi \Rightarrow z=2+yi \Rightarrow$ tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $x=2$ trừ điểm $(2;0)$.

TH2: $y=0 \Rightarrow z-2=z \Leftrightarrow z=x+2 \Rightarrow$ tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $y=0$ trừ điểm $(-2;0)$.

TH3: $|x|=|y| \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=y \Rightarrow z-2=x+xi \Rightarrow z=x+2+xi\\x=-y \Rightarrow z-2=x-xi \Rightarrow z=x+2-xi\end{array}\right. \Rightarrow$ tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $\left[\begin{array}{l}y=x-2\\y=-x+2\end{array}\right.$ trừ điểm $(0;-2),(2;0),(0;2),(-2;0)$.

Ta có hình vẽ:



Vậy có 5 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Câu 37 (VD)

Phương pháp:

- Tính số phần tử của không gian mẫu.

- Gọi A là biến cố: “không có cặp nào gồm hai học sinh cùng lớp” $\Rightarrow$ Mỗi học sinh lớp 12A phải ghép cặp với một học sinh lớp 12B. Chọn từng học sinh lớp 12A, sau đó chọn 1 học sinh lớp 12B để ghép cặp với học sinh lớp 12A đã được chọn.

Cách giải:

Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right)=C_{10}^{2}.C_{8}^{2}.C_{6}^{2}.C_{4}^{2}.C_{2}^{2}=113400.$

Gọi A là biến cố: "không có cặp nào gồm hai học sinh cùng lớp" $\Rightarrow$ Mỗi học sinh lớp 12A phải ghép cặp với một học sinh lớp 12B.

$\Rightarrow n\left(A\right)=\left(C_{5}^{1}\right)^{2}.\left(C_{4}^{1}\right)^{2}.\left(C_{3}^{1}\right)^{2}.\left(C_{2}^{1}\right)^{2}.\left(C_{1}^{1}\right)^{2}=14400$

Vậy xác suất biến cố A là $P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{14400}{113400}=\dfrac{8}{63}.$

Chọn D.

Câu 38 (VD)

Phương pháp:

- Tìm hàm vận tốc $v\left(t\right)$ trên mỗi giai đoạn dựa vào đồ thị.

- Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t=a$ đến thời điểm $t=b$ là $s=\int\limits_{a}^{b}v\left(t\right)dt.$

Cách giải:

Trong 2 giây đầu, $v_1=at^2,$ lại có khi $t=2\left(s\right)\Rightarrow v_1=60\left(m/s\right)$ nên $60=a.2^2\Leftrightarrow a=15,$ suy ra $v_1=15t^2.$

Quãng đường vật đi được trong 2 giây đầu là $s_1=\int\limits_{0}^{2}v_1\left(t\right)dt=\int\limits_{0}^{2}15t^2dt=40\left(m\right).$

Trong giây tiếp theo, $v_2=mt+n.$

Ta có $\begin{cases}t=2\Rightarrow v=60\\ t=3\Rightarrow v=360km/h=100m/s\end{cases},$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases}2m+n=60\\ 3m+n=100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=40\\ n=-20\end{cases}$

$\Rightarrow v_2\left(t\right)=40t-20.$

Quãng đường vật đi được trong giây tiếp theo là $s_2=\int\limits_{2}^{3}v_2\left(t\right)dt=\int\limits_{2}^{3}\left(40t-20\right)dt=80\left(m\right).$

Trong 2 giây cuối, $v_3=100\left(m/s\right)$

Quãng đường vật đi được trong 2 giây cuối là $s_3=\int\limits_{3}^{5}v_3\left(t\right)dt=\int\limits_{3}^{5}100dt=200\left(m\right).$

Vậy trong 5 giây đó xe đã đi được quãng đường là: $40+80+200=320\left(m\right).$

Chọn D.

Câu 39 (VD)

Phương pháp:

- Vì $(\alpha)\perp\Delta\Rightarrow(\alpha)$ có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{u_\Delta}=(A;B;C)$. Suy ra dạng phương trình mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+d=0$.

- Tìm giao điểm của Δ với trục Ox, trục Oy và tia Oz.

- Tính độ dài OM, ON, OP theo d.

- Tính $V_{OMNP}=\frac{1}{6}OM.ON.OP$, giải phương trình tìm d.e

- Suy ra phương trình mặt phẳng (α) và tìm điểm thuộc (α).

Cách giải:

Đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3}$ có 1 VTCP là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-2;3)$.

Vì $(\alpha)\perp\Delta\Rightarrow(\alpha)$ có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-2;3)$, khi đó phương trình mặt phẳng (α) có dạng:

$$(\alpha): x-2y+3z+d=0.$$

Ta có $\begin{cases} M=\Delta\cap Ox \\ N=\Delta\cap Oy \\ P=\Delta\cap tia\ Oz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(-d;0;0) \\ N\left(0;\frac{d}{2};0\right) \\ P\left(0;0;-\frac{d}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OM=|d| \\ ON=\frac{|d|}{2} \\ OP=\frac{|d|}{3} \\ -\frac{d}{3}>0\Leftrightarrow d<0 \end{cases}$

Vì $OMNP$ là tứ diện vuông tại O nên

$V_{OMNP}=\frac{1}{6}OM.ON.OP=\frac{1}{6}.\frac{1}{6}|d|^3=\frac{1}{36}.|d|^3=6\Leftrightarrow|d|^3=216\Leftrightarrow|d|=6\Leftrightarrow d=\pm6.$

Mà $d<0\Rightarrow d=-6\Rightarrow(\alpha): x-2y+3z-6=0$.

Vậy (α) đi qua điểm $B(1;-1;1)$.

Chọn A.

Câu 40 (VD)

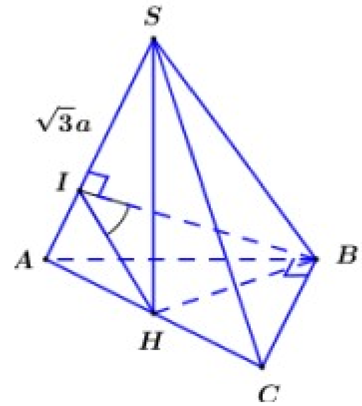
Phương pháp:

- Gọi H là trung điểm của AC, chứng minh $SH\perp(SAC), BH\perp(SAC)$.

- Trong (SAB) kẻ $BI\perp SA$, chứng minh $\angle((SAB);(SAC))=\angle(BH;HI)$.

- Sử dụng tính chất tam giác vuông cân, định lí Pytago, hệ thức lượng trong tam giác vuông và tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông để tính góc.

Cách giải:



Gọi H là trung điểm của AC ta có $SH \perp AC$ (do tam giác SAC cân tại S).

Ta có $\begin{cases} (SAC) \perp (ABC) = AC \\ AH \subset (SAC), AH \perp AC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (ABC)$. Tương tự $BH \perp (SAC)$

Trong (SAB) kẻ $BI \perp SA$ ta có $\begin{cases} SA \perp BI \\ SA \perp BI\left(do \text{ BH} \perp (SAC)\right) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BHI) \Rightarrow SA \perp HI$

$$\Rightarrow \begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ BI \subset (SAB), BI \perp SA \\ HI \subset (SAC), HI \perp SA \end{cases} \Rightarrow \angle\left((SAB);(SAC)\right) = \angle(BI;HI).$$

Vì $BH \perp (SAC)(cmt) \Rightarrow BH \perp HI \Rightarrow \Delta BHI$ vuông tại I.

Do đó $\angle\left((SAB);(SAC)\right) = \angle(BH;HI) = \angle BHI$

Tam giác ABC vuông cân tại B có $AB = BC = 2a$ nên $BH = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}, AC = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}a.$

Ta có: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a.$

$$\Rightarrow HI = \frac{SH.AH}{SA} = \frac{a.\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}a}{3}.$$

Xét tam giác vuông BHI có $\tan \angle BIH = \dfrac{BH}{IH} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{6}a}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle BIH = 60^0$

Vậy $\angle\left((SAB);(SAC)\right) = 60^0.$

Chọn A.

Câu 41 (VD)

Phương pháp:

- Sử dụng: Vì I là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\frac{x}{x-1}\Rightarrow IA=IB$.

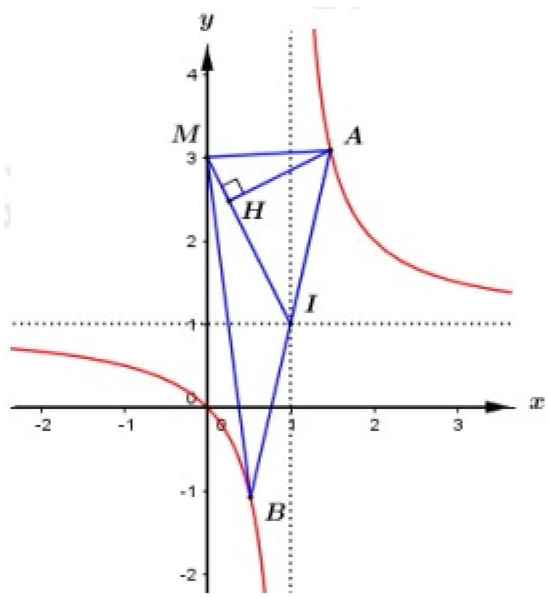
- Chứng minh $S_{\Delta MAB}=2S_{\Delta MAI}$

- Kẻ $AH\perp MI\left(H\in MI\right)$ ta có $S_{\Delta MAI}=\frac{1}{2}AH.MI$, chứng minh để $S_{\Delta MAB}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $S_{\Delta MAI}$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Rightarrow AH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- Viết phương trình đường thẳng MI, tính $AH=d\left(A;MI\right)$, sử dụng BĐT Cô-si để tìm GTNN.

- Suy ra tọa độ điểm A, tính IA và suy ra AB.

Cách giải:



Dễ thấy I là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\frac{x}{x-1}$ (giao điểm 2 đường tiệm cận).

Vì d đi qua I và cắt đồ thị $y=\frac{x}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt A,B nên $IA=IB=\frac{1}{2}AB$.

Ta có: $\frac{S_{\Delta MAI}}{S_{\Delta MAB}}=\frac{MI}{MA}=\frac{1}{2}\Rightarrow S_{\Delta MAB}=2S_{\Delta MAI}$

Kẻ $AH\perp MI\left(H\in MI\right)$ ta có $S_{\Delta MAI}=\frac{1}{2}AH.MI$ với $MI=\sqrt{\left(1-0\right)^2+\left(1-3\right)^2}=\sqrt{5}$

$\Rightarrow S_{\Delta MAI}=\frac{1}{2}AH.\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{2}AH$.

Để $S_{\Delta MAB}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $S_{\Delta MAI}$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Rightarrow AH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Phương trình đường thẳng MI là $\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-1}{3-1}\Leftrightarrow 2(x-1)=-(y-1)\Leftrightarrow 2x+y-3=0$

Gọi $A\left(x_0;\frac{x_0}{x_0-1}\right)\in(C)$ ta có $AH=d(A;MI)=\frac{\left|2x_0+\frac{x_0}{x_0-1}-3\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{\left|2x_0+\frac{1}{x_0-1}-2\right|}{\sqrt{5}}$.

Giả sử A là điểm nằm bên phải đường thẳng $x>1\Rightarrow x_0>1$.

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $2x_0+\frac{1}{x_0-1}-2=2(x_0-1)+\frac{1}{x_0-1}\ge 2\sqrt{2}\Rightarrow AH_{\min}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2(x_0-1)=\frac{1}{x_0-1}\Leftrightarrow (x_0-1)^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_0-1=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x_0=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Khi đó $A\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}};1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow IA=\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)^2+\left(1+\sqrt{2}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}\Rightarrow AB=2IA=\sqrt{10}$.

Vậy để $S_{\Delta MAB}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $AB=\sqrt{10}$.

Chọn A.

Câu 42 (VD)

Phương pháp:

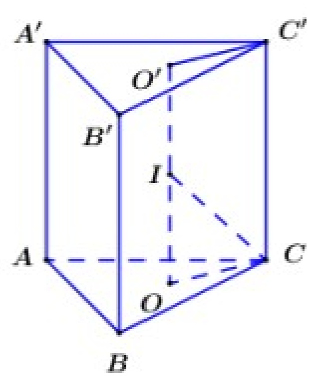
- Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$ chính là mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$.

- Sử dụng công thức tính nhanh: Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ, R_{day} là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy ABC, ta có $R=\sqrt{\frac{h^2}{4}+R_{day}^2}$, với h là chiều cao hình trụ.

- Áp dụng định lí Cosin tính BC.

- Áp dụng định lí sin tính $R_{day}:\frac{BC}{\sin\angle BAC}=2R_{day}$.

Cách giải:



Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$ chính là mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ, R_{day} là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy ABC, ta có $R=\sqrt{\frac{h^2}{4}+R_{day}^2}$, với h là chiều cao lăng trụ.

Ta có: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin\angle BAC=\frac{1}{2}.2a.a.\sin 120^0=\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$.

Áp dụng định lí Cosin trong tam giác ABC ta có $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\angle BAC=7a^2\Rightarrow BC=\sqrt{7}a$.

Áp dụng định lí Sin trong tam giác ABC ta có: $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=2R_{day}\Rightarrow R_{day}=\frac{\sqrt{21}a}{3}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $A.BCC'B'$ là: $R=\sqrt{\frac{h^2}{4}+R_{day}^2}=\sqrt{\frac{4a^2}{4}+\frac{7a^2}{3}}=\frac{\sqrt{30}a}{3}$

Chọn A.

Câu 43 (VD)

Phương pháp:

- Đặt $f(x)=6^x-2^x-3^x$. Tính $f'(x)$.

- Chứng minh $f'(x)>0\ \forall x>0, f'(x)<0\ \forall x<0$ và suy ra phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$.

- Lập BBT hàm số $f(x)$.

- Số nghiệm của phương trình $6^x-2^x-3^x=\frac{a}{5}$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=6^x-2^x-3^x$ và đường thẳng $y=\frac{a}{5}$.

Cách giải:

Xét hàm số $f(x)=6^x-2^x-3^x$ ta có $f'(x)=6^x\ln 6-2^x\ln 2-3^x\ln 3$.

Ta có:

$$f'(x)=6^x\ln 6-2^x\ln 2-3^x\ln 3$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=6^x(\ln 2+\ln 3)-2^x\ln 2-3^x\ln 3$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=(6^x-2^x)\ln 2+(6^x-3^x)\ln 3$$

Với $x>0\Rightarrow\begin{cases}6^x>2^x\\6^x>3^x\\\ln 2>0,\ln 3>0\end{cases}\Rightarrow f'(x)>0$

Với $x < 0 \Rightarrow \begin{cases} 6^x < 2^x \\ 6^x < 3^x \\ \ln 2 > 0, \ln 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) < 0.$

Với $x = 0 \Rightarrow f'(x) = 0.$

Do đó phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0.$

Ta có BBT:

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f(x)$	$0 \searrow -1 \nearrow +\infty$

Dựa vào BBT ta thấy phương trình $6^x - 2^x - 3^x = \dfrac{a}{5}$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -1 < \dfrac{a}{5} < 0 \Leftrightarrow -5 < a < 0.$

Mà $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \{-4;-3;-2;-1\}$. Vậy có 4 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.

Câu 44 (VD)

Phương pháp:

- Lập BBT của hàm số $u(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$, xác định sự tương ứng nghiệm $x \leftrightarrow u(x)$.

- Đặt $t = u(x)$. Biện luận để phương trình $f(t) = m$ có đúng 3 nghiệm x phân biệt thì cần có nghiệm t thỏa mãn điều kiện gì?

- Dựa vào đồ thị hàm số tìm m để phương trình có nghiệm t thỏa mãn điều kiện vừa biện luận ở trên.

Cách giải:

Xét hàm số $u(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$ ta có

$$u'(x) = \frac{\sqrt{x^2+3} - (x+3).\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}$$

$$= \frac{x^2+3-x^2-3x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}} = \frac{3-3x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$$

$u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có BBT:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Đặt $t = u(x)$, phương trình $f(u(x)) = m \Leftrightarrow f(t) = m.$

Do đó để phương trình $f(t) = m$ có đúng 3 nghiệm x phân biệt thì cần phải có 2 nghiệm t phân biệt thỏa mãn $\begin{cases} t_1 \in (-1;1) \cup \{2\} \\ t_2 \in (1;2) \end{cases} (*).$

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy $(*) \Rightarrow m \in (-3;0].$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;-1;-2\}.$

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Câu 45 (VDC)

Phương pháp:

- Tính $g'(x)$.

- Giải phương trình $g'(x) = 0$

- Lập BXD $g'(x)$.

Cách giải:

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(1-x)$ ta có $f'(1-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - x = 0 \\ 1 - x = 2 \\ 1 - x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right..$

Do đó $f'\left(x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3=1 \\ x^2-3=-1 \\ x^2-3=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$.

Lấy $x=3$ ta có $g'(x)=6f'(6)<0,$ qua các nghiệm của $g'(x)=0$ thì $g'(x)$ đổi dấu.

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-1;0)$.

Chọn D.

Câu 46 (VDC)

Phương pháp:

- Chuyển vế, chia cả 2 vế cho $\sin^2 x$.

- Lấy nguyên hàm hai vế, từ đó tìm hàm $f(x)$.

- Sử dụng giả thiết $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ tìm hằng số $C,$ từ đó tìm $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

- Đồng nhất hệ số tìm a,b,c và tính tổng $a+b+c$.

Cách giải:

Theo bài ra ta có:

$$f'(x)\sin x = x + f(x)\cos x$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\sin x - f(x)\cos x = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)\sin x - f(x).(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{x}{\sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)'=\frac{x}{\sin^2 x}$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta có:

$$\int\left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)'dx=\int\frac{x}{\sin^2 x}dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sin x}=\int\frac{x}{\sin^2 x}dx$$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x\cot x + \int \cot x dx = -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= -x\cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x\cot x + \ln|\sin x| + C$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\sin x} = -x\cot x + \ln|\sin x| + C \Rightarrow f(x) = \sin x\left[-x\cot x + \ln|\sin x| + C\right]$$

Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ nên $1 = \sin\frac{\pi}{2}\left[-\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi}{2} + \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| + C\right] \Leftrightarrow 1 = 1.\left(-\frac{\pi}{2}.0 + \ln 1 + C\right) \Leftrightarrow C = 1.$

$$\Rightarrow f(x) = \sin x\left[-x\cot x + \ln|\sin x| + 1\right]$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\left[-\frac{\pi}{6}.\cot\frac{\pi}{6} + \ln\left|\sin\frac{\pi}{6}\right| + 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{6}.\sqrt{3} + \ln\frac{1}{2} + 1\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left(6 - 6\ln 2 - \pi\sqrt{3}\right)$$

$\Rightarrow a = 6, b = -6, c = -1$

Vậy $a + b + c = 6 - 6 - 1 = -1.$

Chọn A.

Câu 47 (VDC)

Phương pháp:

- Tính Δ của phương trình $z^2 - (a-3)z + a^2 + a = 0$, giải bất phương trình $\Delta < 0.$

- Phương trình bậc hai có 2 nghiệm phức thì hai nghiệm đó là số phức liên hợp của nhau, đặt $z_1 = x + yi \Rightarrow z_2 = x - yi$

- Giải phương trình $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ tìm mối quan hệ giữa x và y.

- Giải phương trình $z^2 - (a-3)z + a^2 + a = 0$ theo a, Δ tìm z_1, z_2. Với mỗi trường hợp trên giải phương trình chứa căn tìm a.

Cách giải:

Xét phương trình $z^2 - (a-3)z + a^2 + a = 0$ ta có:

$\Delta = (a-3)^2 - 4(a^2+a) = -3a^2 - 10a + 9.$

Để phương trình có 2 nghiệm phức thì $-3a^2 - 10a + 9 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > \dfrac{-5+2\sqrt{13}}{3} \\ a < \dfrac{-5-2\sqrt{13}}{3} \end{array} \right. (*).$

Vì z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - (a-3)z + a^2 + a = 0$ nên chúng là 2 số phức liên hợp. Do đó đặt $z_1 = x + yi \Rightarrow z_2 = z - yi.$

Theo bài ra ta có:

$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$

$\Leftrightarrow |x + yi + x - yi| = |x + yi - x + yi|$

$\Leftrightarrow |2x| = |2yi|$

$\Leftrightarrow |x| = |yi|$

$\Leftrightarrow |x| = |y|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array} \right.$

Ta có: $z^2 - (a-3)z + a^2 + a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{(a-3) + \sqrt{|\Delta|}i}{2} = \dfrac{a-3}{2} + \dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2}i \\ z_1 = \dfrac{(a-3) - \sqrt{|\Delta|}i}{2} = \dfrac{a-3}{2} - \dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2}i \end{array} \right.$

TH1: $x = y \Rightarrow a - 3 = \sqrt{|\Delta|} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 3 \\ (a-3)^2 = 3a^2 + 10a - 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 3 \\ 2a^2 + 16a - 18 - 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -9 \end{cases} (ktm).$

TH2: $x = -y \Rightarrow 3 - a = \sqrt{|\Delta|} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 3 \\ (a-3)^2 = 3a^2 + 10a - 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 3 \\ 2a^2 + 16a - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -9 \end{cases} (tm).$ Hai giá trị này của a thỏa mãn điều kiện $(*)$.

Vậy có 2 số nguyên a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Câu 48 (VD)

Phương pháp:

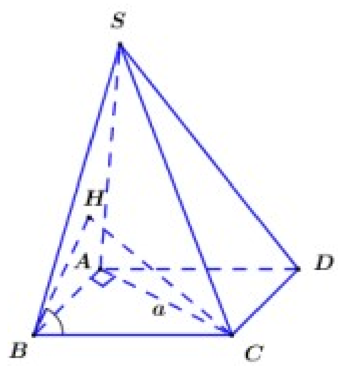
- Chứng minh $\angle\left(AD;\left(SAB\right)\right)=\angle\left(BC;\left(SAB\right)\right)$

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên $\left(SAB\right)$, xác định $\angle\left(BC;\left(SAB\right)\right)$. Từ đó tính CH.

- Tính $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}CH.S_{\Delta SAB}$

- Tính $V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}$.

Cách giải:



Vì $BC//AD\Rightarrow\angle\left(AD;\left(SAB\right)\right)=\angle\left(BC;\left(SAB\right)\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên $\left(SAB\right)\Rightarrow BH$ là hình chiếu của BC lên $\left(SAB\right)$.

$\Rightarrow\angle\left(BC;\left(SAB\right)\right)=\angle\left(BC;BH\right)=\angle HBC=30^0$

Xét tam giác vuông ABC có $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{3a^2+a^2}=2a$

Xét tam giác vuông BCH có $CH=BC.\sin 30^0=2a.\frac{1}{2}=a$.

Vì ΔSAB đều cạnh $a\sqrt{3}$ nên $S_{\Delta SAB}=\frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2.\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}CH.S_{\Delta SAB}=\frac{1}{3}.a.\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}=\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}=\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Chọn C.

Câu 49 (VDC)

Phương pháp:

- Xét hàm đặc trưng, rút y theo x.

- Thế vào biểu thức $\frac{4}{x^2}+\frac{1}{y^2}$, sử dụng: Biểu thức $ax^2+bx+c\left(a>0\right)$ đạt GTNN tại $x=-\frac{b}{2a}$. Từ đó tìm x,y.

Cách giải:

Với x,y ta có:

$$\frac{x+y}{10}+\log\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}\right)=1+2xy$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+y}{10}+\log\frac{x+y}{2xy}=1+2xy$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+y}{10}+\log\left(x+y\right)-\log\left(2xy\right)=1+2xy$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+y}{10}+\log\left(x+y\right)-1=\log\left(2xy\right)+2xy$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+y}{10}+\log\frac{x+y}{10}=\log\left(2xy\right)+2xy\ \left(*\right)$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log t+t\left(t>0\right)$ ta có $f'\left(t\right)=\frac{1}{t\ln 10}+1>0\forall t>0,$ nên hàm số $y=f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$. Do đó $\left(*\right)\Leftrightarrow\frac{x+y}{10}=2xy\Leftrightarrow x+y=20xy\Rightarrow y=\frac{x}{20x-1}$.

Ta có:

$$P=\frac{4}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{4}{x^2}+\frac{\left(20x-1\right)^2}{x^2}=\frac{400x^2-40x+5}{x^2}=400-\frac{40}{x}+\frac{5}{x^2}.$$

Hàm số đạt GTNN khi $\frac{1}{x}=\frac{40}{2.5}=4\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\left(tm\right)$.

Khi đó $P_{\min}$ khi $x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{16}$.

Vậy $xy=\frac{1}{4}.\frac{1}{16}=\frac{1}{64}$.

Chọn C.

Câu 50 (VDC)

Phương pháp:

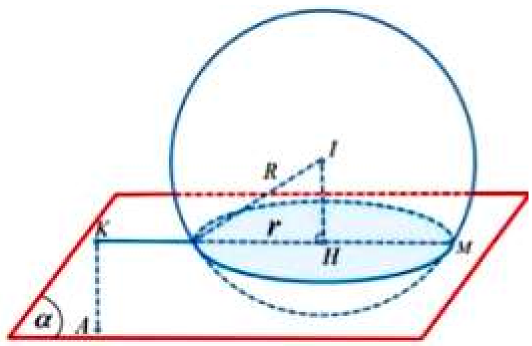
- Xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu $\left(S\right)$.

- Gọi H là tâm đường tròn (C), tìm tọa độ điểm H. Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên (α), tìm tọa độ điểm K.

- Sử dụng định lí Pytago: $AM^2 = AK^2 + KM^2$, chứng minh $AM_{\max} \Leftrightarrow KM_{\max}$.

- Sử dụng BĐT tam giác: $KM \le KH + HM$, tìm M để $KM = KH + HM$.

Cách giải:



Mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 24$ có tâm $I(0;2;-3)$, bán kính $R = 2\sqrt{6}$.

Gọi H là tâm đường tròn $(C) \Rightarrow IH \perp (\alpha)$.

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $IH: \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = -3 \end{cases}$.

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = -3 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = -3 \\ t + 2 + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow H(-1;1;-3)$.

Ta có $IH = d(I;(\alpha)) = \dfrac{|0+2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow$ Bán kính đường tròn (C) là $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{24-2} = \sqrt{22}$.

Dễ thấy điểm A nằm ngoài mặt cầu (S). Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên (α), tương tự như tìm tọa độ điểm H ta tìm được $K(8;-8;3)$.

Khi đó ta có $KH = \sqrt{(8+1)^2 + (-8-1)^2 + (3+3)^2} = 3\sqrt{22} > r$.

Áp dụng định lí Pytago ta có: $AM^2 = AK^2 + KM^2$, do AK không đổi nên $AM_{\max} \Leftrightarrow KM_{\max}$.

Ta cps $KM \le KH + HM$ (BĐT tam giác), do đó $KM_{\max} \Leftrightarrow HM = KH + HM = 3\sqrt{22} + \sqrt{22} = 4\sqrt{22}$, khi đó $\overrightarrow{MK} = 4\overrightarrow{MH}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8 - x_M = 4\left(-1 - x_M\right) \\ -8 - y_M = 4\left(1 - y_M\right) \\ 3 - z_M = 4\left(3 - z_M\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -4 \\ y_M = 4 \\ z_M = 3 \end{cases}.$$

Vậy $x_M = -4$.

Chọn B.

HẾT