

**ĐỀ THI OLYMPIC CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN 2023**

Môn thi: TOÁN

Ngày thi thứ nhất

*Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề*

**Câu 1.** Cho dãy số  $(a_n)$  thỏa mãn  $a_1 = 7$  và  $a_{n+1} = a_n(3a_n - 2^{2^n+1})$  với mọi số nguyên dương  $n$ . Chứng minh rằng nếu  $p$  là ước nguyên tố của  $a_{2023}$  thì  $p - 1$  chia hết cho 3.

**Câu 2.** Giả sử  $a, b$  là các số nguyên dương sao cho  $\frac{a^3b^3}{a^4 + b^4}$  là số nguyên dương không có ước nguyên tố vượt quá 3. Chứng minh rằng  $a = b$ .

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nội tiếp trong đường tròn  $(O)$  với phân giác trong  $AD$  ( $D$  nằm trên cạnh  $BC$ ).  $M$  là trung điểm  $BC$ .  $AM$  cắt lại  $(O)$  tại  $N$ .  $J$  là trung điểm cung  $BC$  chứa  $A$  của  $(O)$ . Trên  $(O)$  lấy các điểm  $S$  và  $T$  sao cho  $JS \parallel AB$  và  $JT \parallel AC$ .

a) Chứng minh rằng đường thẳng  $ST$  đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $ADN$ .

b) Lấy  $P$  thuộc  $(O)$  sao cho  $NP = AJ$ . Gọi giao điểm của  $PB$  và  $PC$  lần lượt với  $JS$  và  $JT$  là  $Q$  và  $R$ . Chứng minh rằng  $Q, R, D$  thẳng hàng.

**Câu 4.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{2ab(a^2 - ab + b^2)}{a^4 + b^4}} + \sqrt{\frac{2bc(b^2 - bc + c^2)}{b^4 + c^4}} + \sqrt{\frac{2ca(c^2 - ca + a^2)}{c^4 + a^4}} \leq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{a + b + c}.$$

— HẾT NGÀY 1 —

**ĐỀ THI OLYMPIC CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN 2023**

Môn thi: TOÁN

Ngày thi thứ hai

*Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề*

**Câu 5.** Tìm tất cả các đa thức  $P(x)$  với hệ số thực sao cho đẳng thức

$$P(x^4) + 4x^2(P(x))^2 = (P(x))^4 + 2x^4$$

đúng với mọi số thực  $x$ .

**Câu 6.** Xét một số số nguyên dương có tổng bằng 2023. Hãy tìm giá trị lớn nhất có thể có của tích các số nguyên dương này.

**Câu 7.** Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $B$  với  $BC < AD$ . Gọi  $\omega$  là đường tròn tâm  $C$  đi qua  $B$ . Giả sử  $\ell$  là một tiếp tuyến của  $\omega$  sao cho  $\ell$  vuông góc với  $BD$  đồng thời  $\ell$  cắt tia đối tia  $AB$  tại  $E$ .  $F$  thuộc đường thẳng  $CD$  sao cho  $EF \parallel AD$ .  $P$  là hình chiếu vuông góc của  $F$  trên  $\ell$ .  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  $EPM$  tiếp xúc với  $\omega$ .

— HẾT NGÀY 2 —