SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **BÌNH PHƯỚC** **ĐỀ CHÍNH THỨC** *(Đề thi có 01 trang, gồm 4 câu)*	**KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN** **CHỌN HỌC SINH GIỎI DỰ THI** **CẤP QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2021-2022** Môn thi: Toán Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)* *Ngày thi thứ nhất: 03/01/2022*

Câu 1. (5.0 điểm) Cho dãy số $\left(u_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_1, u_2 > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}\sqrt{u_n + 2} + \dfrac{n-1}{3n}u_{n-1} + \dfrac{1}{3}, \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh $\left(u_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2. (5.0 điểm)

a) Cho hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn: $f\left(x+f\left(x\right)+y\right)=x+f\left(x\right)+f\left(y\right), \forall x,y\in\mathbb{Z}$.

Xét tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid f\left(x+y\right)=f\left(y\right)+x, \forall y\in\mathbb{Z}\right\}$. Chứng minh rằng tập A có tính chất: nếu $x_1\in A$ và $x_2\in A$ thì $x_1-x_2\in A$.

b) Hãy chỉ ra ít nhất hai hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{5}{6}\right)=\dfrac{1}{6}$ và

$$f\left(x+f\left(x\right)+y\right)=x+f\left(x\right)+f\left(y\right), \forall x,y\in\mathbb{Q}.$$

c) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f\left(x+f\left(x\right)+y\right)=x+f\left(x\right)+f\left(y\right), \forall x,y\in\mathbb{Z}.$$

Câu 3. (5.0 điểm) Tìm số nguyên dương m lớn nhất sao cho với mọi $k\in\{1,2,\ldots,m\}$ và mọi bộ 10 số nguyên dương $a_1,a_2,\ldots,a_{10}$ thì luôn tồn tại cách chọn các số nguyên $c_1,c_2,\ldots,c_{10}\in\{-1,0,1\}$ (*không đồng thời bằng* 0) để cho $c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_{10}a_{10}$ chia hết cho k.

Câu 4. (5.0 điểm) Cho tam giác ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi A' đối xứng A qua BC. Gọi P là giao điểm của $A'C$ và (O) (P khác C).

a) Gọi N,K lần lượt là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC và tam giác PAC. Dựng hình bình hành $BNLO$. Chứng minh LK vuông góc BP.

b) Gọi d là đường thẳng qua A' song song BC. Gọi X là giao điểm của AP và d. Đường thẳng qua X vuông góc AX cắt AA' tại S. Chứng minh đường tròn tâm S, bán kính SX tiếp xúc đường tròn (O).

……………………HẾT……………………

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính bỏ túi*
- *Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **BÌNH PHƯỚC** **ĐỀ CHÍNH THỨC** *(Đề thi có 01 trang, gồm 3 câu)*	**KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN** **CHỌN HỌC SINH GIỎI DỰ THI** **CẤP QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2021-2022** Môn thi: Toán Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)* *Ngày thi thứ hai: 04/01/2022*

Câu 5. (6.0 điểm) Cho p là số nguyên tố lẻ có dạng $2^{2^k}+1$ (với $k \in \mathbb{Z}^+$). Chứng minh rằng với mọi số nguyên a với $(a,p)=1$ thì tồn tại $u \in \mathbb{N}$ sao cho $a \equiv 7^u \bmod p$.

Câu 6. (7.0 điểm) Với a,b là các số nguyên dương, xét dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1, u_2 = 2, \text{và } u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Gọi S là tập hợp các cặp số (a,b) sao cho mọi số nguyên dương m không thuộc dãy (u_n) thì đều có thể biểu diễn thành tổng của các số hạng phân biệt của dãy.

a) Xác định tất cả các cặp số thuộc S.

b) Ứng với mỗi cặp $(a,b) \in S$, tìm tất cả các số nguyên dương m không thuộc dãy (u_n) tương ứng sao cho cách biểu diễn trên là duy nhất.

Bài 7. (7.0 điểm) Cho tam giác ABC $(\widehat{ABC} > 90^0)$ có O là tâm đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F.

a) Đường thẳng AI cắt (O) tại R $(R \neq A)$. Kẻ đường kính AT của (O). Đường tròn đường kính IT cắt RD và AT lần lượt tại Z, Y. Chứng minh: $ZI.YT = IY.ZT$.

b) Các đường thẳng EI và FI lần lượt cắt AD tại P, Q. Gọi X là giao điểm của BQ và CP. Chứng minh rằng $\widehat{AIX} = 90^0$.

……………………HẾT……………………

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính bỏ túi.*
- *Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.*