SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
THANH HOÁ
**TRƯỜNG THPT LÊ LAI**

**ĐỀ THI KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG LẦN 1**
**NĂM HỌC 2020 - 2021**
MÔN**: TOÁN;** KHỐI**: 12**
*Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian giao đề*
Đề thi gồm có 50 câu; 06 trang

**Câu 1.** Từ một nhóm gồm 14 học sinh có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh?

**A.** $C_{14}^{2}$. **B.** $A_{14}^{2}$. **C.** $7$. **D.** $C_{14}^{1}.C_{13}^{1}$.

**Câu 2.** Cho cấp số cộng $(u_n)$ có $u_1 = 25$ và $u_3 = 11$. Hãy tính $u_2$

**A.** $18$. **B.** $16$ **C.** $14$ **D.** $12$

**Câu 3.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $3$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(2;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

**Câu 4.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

**A.** $x = 2$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 1$.

**Câu 5.** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |

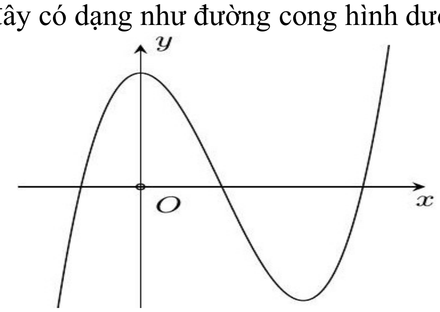
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

**A.** $3$. **B.** $0$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Câu 6.** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$ là

**A.** $x = 2$. **B.** $y = 1$. **C.** $y = \dfrac{1}{2}$. **D.** $y = 2$.

**Câu 7.** Đồ thị hàm số nào sau đây có dạng như đường cong hình dưới đây




**A.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

**C.** $y=x^4-3x^2+2$. **D.** $y=-x^3+3x^2+2$.

**Câu 8.** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục hoành là

**A.** $3$. **B.** $0$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Câu 9.** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_4\left(a^3\right)$ bằng

**A.** $3\log_2 a$. **B.** $3+\log_4 a$. **C.** $\frac{3}{2}\log_2 a$. **D.** $\frac{2}{3}\log_2 a$.

**Câu 10.** Tính đạo hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^x-\ln x$.

**A.** $y'=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}$. **B.** $y'=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}$. **C.** $y'=x\mathrm{e}^x$. **D.** $y'=\frac{e^x}{x}$.

**Câu 11.** Viết biểu thức $\sqrt{a\sqrt{a}}$ $(a>0)$ về dạng lũy thừa của $a$ là.

**A.** $a^{\frac{5}{4}}$. **B.** $a^{\frac{1}{4}}$. **C.** $a^{\frac{3}{4}}$. **D.** $a^{\frac{1}{2}}$.

**Câu 12.** Phương trình $2^{3-4x}=\frac{1}{32}$ có nghiệm là

**A.** $x=-3$ **B.** $x=-2$ **C.** $x=2$ **D.** $x=3$

**Câu 13.** Phương trình $\log_3(3x-2)=3$ có nghiệm là

**A.** $\frac{25}{3}$ **B.** $\frac{29}{3}$ **C.** $\frac{11}{3}$ **D.** $87$

**Câu 14.** Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=2-\cos x$ tương ứng là:

**A.** $x^2+\sin x+C.$ **B.** $2-\sin x+C.$ **C.** $2x-\sin x+C.$ **D.** $2x-\cos x+C.$

**Câu 15.** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x}{x-2}$ trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$ là

**A.** $x+2\ln\left(x-2\right)+C$. **B.** $x-2\ln\left(x-2\right)+C$.

**C.** $x-\frac{2}{\left(x-1\right)^2}+C$. **D.** $x+\frac{2}{\left(x-2\right)^2}+C$.

**Câu 16.** Cho $\int_1^2 2f(x)dx=2;\int_2^5 f(x)dx=3.$ Tính $I=\int_1^5 f(x)dx.$

**A.** $I=4.$ **B.** $I=3.$ **C.** $I=6.$ **D.** $I=7.$

**Câu 17.** Tính tích phân $I=\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x.$

**A.** $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{\mathrm{e}^2-2}{2}$. **C.** $I=\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$. **D.** $I=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.

**Câu 18.** Tìm phần ảo của số phức $z=19-20i$?

**A.** $19$. **B.** $20i$. **C.** $20$. **D.** $-20$.

**Câu 19.** Cho hai số phức $z_1=4i-5$, $z_2=7-3i$. Phần thực của số phức $z_1-z_2$ là

**A.** $-12$. **B.** $7$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Câu 20.** Cho số phức $z=2-i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$ trên mặt phẳng tọa độ?

**A.** $M\left(2;-1\right)$. **B.** $N\left(-1;2\right)$. **C.** $P\left(1;2\right)$. **D.** $Q\left(2;1\right)$.

**Câu 21.** Thể tích khối chóp có diện tích đáy bằng $3$ và chiều cao bằng $4$ là

**A.** $V=8$. **B.** $V=4$. **C.** $V=2$. **D.** $V=12$.

**Câu 22.** Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy $B$ và chiều cao $h$ là

**A.** $V=3Bh$. **B.** $V=Bh$. **C.** $V=2Bh$. **D.** $V=\frac{1}{3}Bh$.

**Câu 23.** Cho khối nón có chiều cao bằng 6 và đường kính đường tròn đáy bằng 8. Thể tích của khối nón là

**A.** $V=160\pi$. **B.** $V=32\pi$. **C.** $V=128\pi$. **D.** $V=384\pi$.

**Câu 24.** Cho hình trụ tròn xoay có độ dài đường sinh là $l$, độ dài đường cao là $h$ và $r$ là bán kính đáy. Công thức diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay đó là

**A.** $S_{xq} = \pi rl$. **B.** $S_{xq} = \pi r^2 h$. **C.** $S_{xq} = \pi rh$. **D.** $S_{xq} = 2\pi rl$.

**Câu 25.** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

**A.** $(-2;-1;-3)$. **B.** $(-3;2;-1)$. **C.** $(2;-3;-1)$. **D.** $(-1;2;-3)$.

**Câu 26.** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y-7)^2+(z+8)^2=25$. Mặt cầu $(S)$ có tọa độ tâm và bán kính lần lượt là

**A.** $I\ (5;7;8)$, $R=5$ **B.** $I\ (-5;-7;8)$, $R=5$

**C.** $I\ (5;7;-8)$, $R=5$ **D.** $I\ (5;-7;-8)$, $R=25$

**Câu 27.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)$: $2x-6y+4z-5=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của $(P)$?

**A.** $\overrightarrow{n_2}=(1;-3;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_1}=(2;6;4)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(2;-6;-5)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(-6;4;-5)$.

**Câu 28.** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng qua hai điểm $M(-2;1;2), N(3;-1;0)$ có vectơ chỉ phương là

**A.** $\vec{u}=(1;0;2)$. **B.** $\vec{u}=(5;-2;-2)$. **C.** $\vec{u}=(-1;0;2)$. **D.** $\vec{u}=(5;0;2)$.

**Câu 29.** Một lô hàng gồm 30 sản phẩm tốt và 10 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm. Xác suất để 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm tốt bằng

**A.** $\frac{135}{988}$. **B.** $\frac{3}{247}$. **C.** $\frac{244}{247}$. **D.** $\frac{15}{26}$.

**Câu 30.** Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $y=-x^3-2x$. **B.** $y=\frac{x-2}{x-1}$. **C.** $y=x^4+3x^2$. **D.** $y=x^3+3x^2$.

**Câu 31.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2+2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

**A.** $2$. **B.** $-23$. **C.** $-22$. **D.** $-7$.

**Câu 32.** Nghiệm của bất phương trình: $\log_{\frac{1}{5}}(2x-3)>-1$

**A.** $x<4$. **B.** $x>\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}<x<4$. **D.** $x>4$.

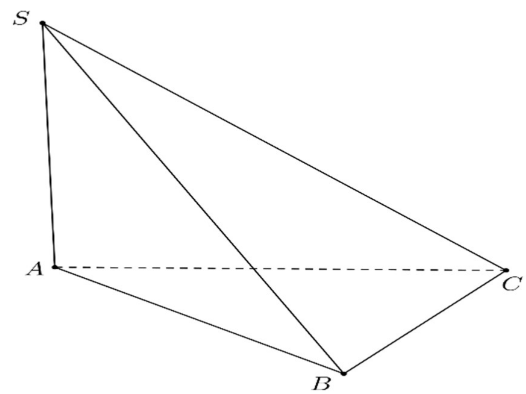
**Câu 33.** Cho $\int_1^2 [4f(x)-2x]dx=1$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

**A.** 1. **B.** $-3$. **C.** 3. **D.** $-1$.

**Câu 34.** Cho hai số phức $z_1=4+2i$ và $z_2=-1-3i$. Phần thực của số phức $z_1.\overline{z_2}$ là

**A.** $-10$. **B.** $10$. **C.** 2. **D.** $-14$.

**Câu 35.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$, $SA=a\sqrt{2}$, tam giác $ABC$ vuông cân tại $B$ và $AC=2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng $SB$ và mặt phẳng $(ABC)$ bằng




**A.** $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

**Câu 36.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = 2a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(SAB)$ bằng

**A.** a **B.** $2a$ **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

**Câu 37.** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(-2;0;0)$ và đi qua $M(0;2;0)$ là:

**A.** $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 8$. **B.** $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 2\sqrt{2}$.

**C.** $(x+2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$. **D.** $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 8$.

**Câu 38.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng $MN$ có phương trình tham số là

**A.** $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}$.

**Câu 39.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Biết $f(-4) = f(4) = -7$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)+5|$ trên đoạn $[-4;4]$ đạt được tại điểm nào?

**A.** $x = -4$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 4$.

**Câu 40.** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn $\log_a b + 6\log_b a = 5$ và $2 \le a;b \le 2005$.

**A.** 54. **B.** 43. **C.** 53. **D.** 44.

**Câu 41.** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x^3 - x & khi\ x \ge 1 \\ -3x+4 & khi\ x \le 1 \end{cases}$.

Biết tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x} dx + \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{xf(\ln(x^2+1))}{x^2+1} dx = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $P = a + b$.

**A.** $P = 77$. **B.** $P = 33$. **C.** $P = 66$. **D.** $P = 99$.

**Câu 42.** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z| = 10$ và $w = (6+8i)\overline{z} + (1-2i)^2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w$ là đường tròn có tâm là

**A.** $I(-3;-4)$. **B.** $I(3;4)$. **C.** $I(1;-2)$. **D.** $I(6;8)$.

**Câu 43.** Cho hình chóp $S.ABC$ đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $B$, $AB = a$, $\widehat{ACB} = 60°$ cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB$ tạo với mặt đáy một góc bằng $45°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

**A.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

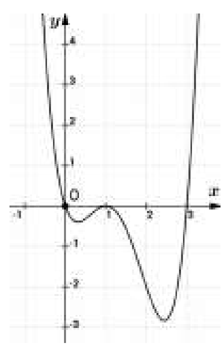
**Câu 44.** Một cuộn túi nilon PE gồm nhiều túi nilon như hình vẽ có lõi rỗng là một hình trụ bán kính đáy của phần lõi là $r = 1,5\,cm$, bán kính đáy của cuộn nilon là $R = 3\,cm$. Biết chiều dày mỗi lớp nilon là $0,05\,mm$, chiều dài của mỗi túi nilon là $25\,cm$. Số lượng túi nilon trong cuộn gần bằng

**A.** 512. **B.** 286. **C.** 1700. **D.** 169.

**Câu 45.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{4}$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 6 = 0$. Biết $\Delta$ cắt mặt phẳng $(P)$ tại $A, M$ thuộc $\Delta$ sao cho $AM = 2\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ $M$ tới mặt phẳng $(P)$.

**A.** $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

**Câu 46.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:



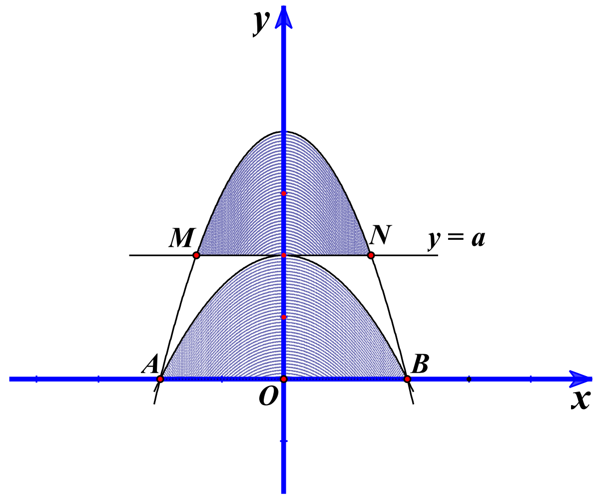
Hỏi hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại và bao nhiêu điểm cực tiểu?

**A.** 2 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu. **B.** 2 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại.
**C.** 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu. **D.** 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

**Câu 47.** Cho các số dương $a, b, c$ thay đổi thỏa mãn $\log_2 a + \log_2 c \ge 2\log_2 b$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + b + c + \dfrac{1}{3}b^3 - 2b^2 + 2$ bằng

**A.** $\sqrt{3}$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Câu 48.** Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 4$ cắt trục hoành tại hai điểm $A$, $B$ và đường thẳng $d: y = a$ $(0 < a < 4)$. Xét parabol $(P_2)$ đi qua $A$, $B$ và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi $S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P_1)$ và $d$. $S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P_2)$ và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$ (tham khảo hình vẽ bên).




Tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

**A.** $T = 99$. **B.** $T = 64$. **C.** $T = 32$. **D.** $T = 72$.

**Câu 49.** Cho số phức $z$ thỏa mãn điều kiện $|z-1| = \sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z+i| + |z-2-i|$ bằng

**A.** $8\sqrt{2}$. **B.** $4$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $8$.

**Câu 50.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1):(x+4)^2 + y^2 + z^2 = 16$, $(S_2):(x+4)^2 + y^2 + z^2 = 36$ và điểm $A(4;0;0)$. Đường thẳng $\Delta$ di động nhưng luôn tiếp xúc với $(S_1)$, đồng thời cắt $(S_2)$ tại hai điểm $B, C$. Tam giác $ABC$ có thể có diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

**A.** $24\sqrt{5}$. **B.** $48$. **C.** $72$. **D.** $28\sqrt{5}$.

--------------------Hết----------------

## BẢNG ĐÁP ÁN

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.A | 2.A | 3.A | 4.A | 5.C | 6.D | 7.A | 8.A | 9.C | 10.B |
| 11.C | 12.C | 13.B | 14.C | 15.A | 16.A | 17.C | 18.D | 19.A | 20.D |
| 21.B | 22.B | 23.B | 24.D | 25.D | 26.C | 27.A | 28.B | 29.C | 30.A |
| 31.C | 32.C | 32.A | 34.A | 35.B | 36.D | 37.D | 38.D | 39.C | 40.A |
| 41.A | 42.A | 43.B | 44.D | 45.B | 46.B | 47.B | 48.B | 49.B | 50.A |

## LỜI GIẢI CHI TIẾT

**Câu 39.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Biết $f(-4)=f(4)=-7$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f(x)+5\right|$ trên đoạn $[-4;4]$ đạt được tại điểm nào?

**A.** $x=-4$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=4$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét $g(x)=f(x)+5 \Rightarrow g'(x)=f'(x)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=-1 \vee x=2 \vee x=4$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-4$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-2$ | $\searrow$ | | | $g(2)$ | $\nearrow$ | $-2$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy $y=\left|f(x)+5\right|$ đạt GTLN tại $x=2$.

**Câu 40.** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn $\log_a b+6\log_b a=5$ và $2\le a;b\le 2005$.

**A.** $54$. **B.** $43$. **C.** $53$. **D.** $44$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\log_a b+6\log_b a=5 \Leftrightarrow \log_a b+6\frac{1}{\log_a b}=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_b a=2\\ \log_b a=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=a^2\\ b=a^3\end{array}\right.$$

TH1: $b=a^2$ và $2\le b\le 2005$ nên $2\le a^2\le 2005 \Leftrightarrow \sqrt{2}\le a\le\sqrt{2005}$

Vì $a;b\in\mathbb{N}^*$ nên $a\in\{2,3,4,5,...,44\}$. Do đó có 43 cặp số $(a;b)$.

TH2: $b=a^3$ và $2\le b\le 2005$ nên $2\le a^3\le 2005 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}\le a\le\sqrt[3]{2005}$

Vì $a;b\in\mathbb{N}^*$ nên $a\in\{2,3,4,5,...,12\}$. Do đó có 11 cặp số $(a;b)$.

Vậy có 54 cặp số $(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 41.** Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}2x^3-x & khi\ x\ge 1\\ -3x+4 & khi\ x\le 1\end{cases}$.

Biết tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}dx+\int\limits_0^{\sqrt{e-1}}\frac{xf\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)}{x^2+1}dx=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $P=a+b$.

**A.** $P=21$. **B.** $P=33$. **C.** $P=45$. **D.** $P=77$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{f(\tan x)}{cos^2x}dx+\int_0^{\sqrt{e-1}}\frac{xf\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)}{x^2+1}dx=J+K$.

+) $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{f(\tan x)}{cos^2x}dx$. Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{1}{cos^2x}dx$. Đổi cận $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\sqrt{3}; x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$.

Suy ra $J=\int_1^{\sqrt{3}}f(t)dt=\int_1^{\sqrt{3}}f(x)dx=\int_1^{\sqrt{3}}\left(2x^3-x\right)dx=\left.\left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{2}\right)\right|_1^{\sqrt{3}}=3$.

+) $K=\int_0^{\sqrt{e-1}}\frac{xf\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)}{x^2+1}dx$. Đặt $t=\ln\left(x^2+1\right)\Rightarrow dt=\frac{2x}{x^2+1}dx\Rightarrow\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{dt}{2}$

Đổi cận $x=\sqrt{e-1}\Rightarrow t=1; x=0\Rightarrow t=0$.

Suy ra $K=\int_0^1 f(t)\frac{dt}{2}=\int_0^1 f(x)\frac{dx}{2}=\int_0^1\frac{-3x+4}{2}dx=\left.\left(-\frac{3}{4}x^2+2x\right)\right|_0^1=\frac{5}{4}$

Vậy $I=J+K=3+\frac{5}{4}=\frac{17}{4}$. Do đó $\begin{cases}a=17\\b=4\end{cases}\Rightarrow P=a+b=21$

**Câu 42.** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z|=10$ và $w=(6+8i)\overline{z}+(1-2i)^2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w$ là đường tròn có tâm là

**A.** $I(-3;-4)$. **B.** $I(3;4)$. **C.** $I(1;-2)$. **D.** $I(6;8)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có

$w=(6+8i)\overline{z}+(1-2i)^2$

$\Leftrightarrow w-(-3-4i)=(6+8i)\overline{z}$

$\Leftrightarrow |w-(-3-4i)|=\sqrt{6^2+8^2}\,|\overline{z}|$

$\Leftrightarrow |w-(-3-4i)|=10.10\Leftrightarrow |w-(-3-4i)|=100$

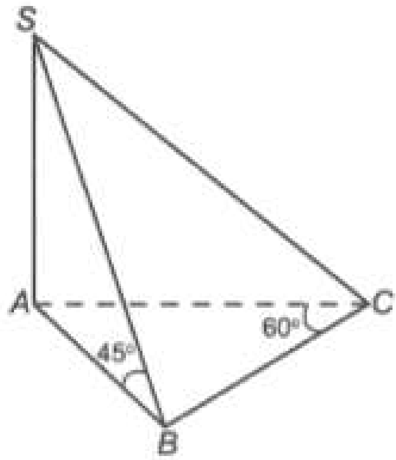
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w$ là đường tròn $(C)$ có tâm $I(-3;-4)$.

**Câu 43.** Cho hình chóp $S.ABC$ đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $B$, $AB=a$, $\widehat{ACB}=60°$ cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB$ tạo với mặt đáy một góc bằng $45°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

**A.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

**Lời giải**

**Chọn B**




Ta có $\Delta ABC$ vuông tại $B$ nên $BC = AB.\cot \widehat{ACB} = a.\cot 60° = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$

Ta có $AB$ là hình chiếu vuông góc của $SB$ trên $(ABC) \Rightarrow \left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SB,AB}\right) = \widehat{SBA} = 45°$

$\Delta SAB$ vuông tại $A$ nên $SA = AB.\tan \widehat{SBA} = AB.\tan 45° = a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}\frac{a^2.\sqrt{3}}{6}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

**Câu 44.** Một cuộn túi nilon PE gồm nhiều túi nilon như hình vẽ có lõi rỗng là một hình trụ bán kính đáy của phần lõi là $r = 1,5\,cm$, bán kính đáy của cuộn nilon là $R = 3\,cm$. Biết chiều dày mỗi lớp nilon là $0,05\,mm$, chiều dài của mỗi túi nilon là $25\,cm$. Số lượng túi nilon trong cuộn gần bằng

**A.** 512. **B.** 286. **C.** 1700. **D.** 169.

**Lời giải**

**Chọn D**

Giả sử chiều cao của hình trụ lõi là $h$.

***Cách 1***

Gọi số lượng túi nilon là $x$, $(x > 0)$.

Thể tích của phần nilon là $25.x.h.0,05.10^{-1} = 0,125hx\left(cm^3\right)$.

Mặt khác thể tích phần nilon là $\left(\pi R^2 - \pi r^2\right).h = \pi.\left(3^2 - 1,5^2\right).h \approx 21,2h\left(cm^3\right)$.

Do đó: $0,125hx \approx 21,2h \Leftrightarrow x \approx 169$.

***Cách 2***

Coi mỗi lớp nilon là một hình trụ.

Số lớp nilon là $\dfrac{R-r}{0,05.10^{-2}} = \dfrac{3-1,5}{0,05.10^{-2}} = 300$

Khi trải cuộn nilon ta được một tấm nilon hình chữ nhật có chiều dài bằng

$$\sum_{k=0}^{299} 2\pi\left(r+k.0,005\right) = 2\pi\left(300r + \frac{299.300}{2}.0,005\right) = 2\pi\left(300.1,5 + \frac{299.300}{2}0,005\right) \approx 4236,44.$$

Do đó số túi nilon bằng $\dfrac{4236,44}{25} \approx 169$.

**Câu 45.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{4}$ và mặt phẳng $(P): x+y-2z+6=0$. Biết $\Delta$ cắt mặt phẳng $(P)$ tại $A, M$ thuộc $\Delta$ sao cho $AM = 2\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ $M$ tới mặt phẳng $(P)$.

**A.** $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn B**

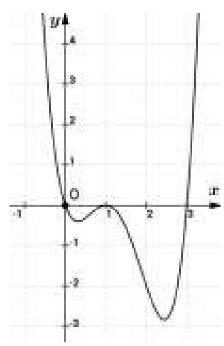
Đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{4}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;4)$.

Mặt phẳng $(P): x+y-2z+6=0$ có vectơ chỉ phương $\vec{n} = (1;1;-2)$.

$$\sin\left(\Delta,(P)\right) = \left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right| = \frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \sin\varphi$$

Suy ra $d\left(M,\Delta\right) = MH = MA.\sin\varphi = 2\sqrt{3}.\sqrt{\dfrac{1}{3}} = 2$.

**Câu 46.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại và bao nhiêu điểm cực tiểu?

**A.** 2 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu.

**B.** 2 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại.

**C.** 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

**D.** 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta thấy:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.,$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;0) \cup (3;+\infty)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0;1) \cup (1;3)$.

Ta có $y' = \left(f(x^2)\right)' = 2x.f'(x^2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$f'(x^2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 < 0 \\ x^2 > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3};+\infty\right)$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x^2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y' = 2xf'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y = f(x^2)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Vậy hàm số $y = f(x^2)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

**Câu 47.** Cho các số dương $a,b,c$ thay đổi thỏa mãn $\log_2 a + \log_2 c \geq 2\log_2 b$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + b + c + \frac{1}{3}b^3 - 2b^2 + 2$ bằng

**A.** $\sqrt{3}$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Lời giải**

Từ giả thiết $\log_2 a + \log_2 c \geq 2\log_2 b \Leftrightarrow \log_2(ac) \geq \log_2 b^2 \Leftrightarrow ac \geq b^2$.

Ta có: $P = (a+c) + b + \frac{1}{3}b^3 - 2b^2 + 2 \geq 2\sqrt{ac} + b + \frac{1}{3}b^3 - 2b^2 + 2$.

$\geq 2b + b + \frac{1}{3}b^3 - 2b^2 + 2 = \frac{1}{3}b^3 - 2b^2 + 3b + 2$.

Xét hàm số: $f(b) = \frac{1}{3}b^3 - 2b^2 + 3b + 2$ với $b > 0$.

Có $f'(b) = b^2 - 4b + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

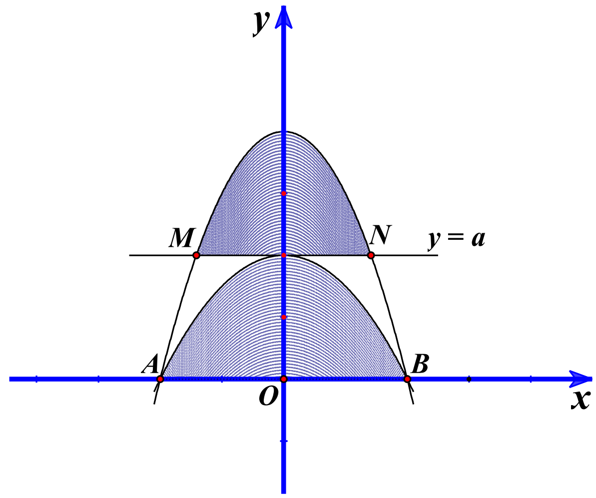
| $b$ | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(b)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(b)$ | $2$ | $\nearrow$ | $\frac{10}{3}$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min\limits_{b>0} f(b) = f(3) = 2$.

$\Rightarrow P \geq 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P$ bằng 2 đạt được khi $b = 3$ và $a = c = 3$.

**Câu 48.** Cho parabol $(P_1): y=-x^2+4$ cắt trục hoành tại hai điểm $A$, $B$ và đường thẳng $d: y=a$ $(0<a<4)$. Xét parabol $(P_2)$ đi qua $A$, $B$ và có đỉnh thuộc đường thẳng $y=a$. Gọi $S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P_1)$ và $d$. $S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P_2)$ và trục hoành. Biết $S_1=S_2$ (tham khảo hình vẽ bên).




Tính $T=a^3-8a^2+48a$.

**A.** $T=99$. **B.** $T=64$. **C.** $T=32$. **D.** $T=72$.

**Lời giải**

**Chọn B**

- Gọi $A$, $B$ là các giao điểm của $(P_1)$ và trục $Ox \Rightarrow A(-2;0)$, $B(2;0) \Rightarrow AB=4$.

- Gọi $M$, $N$ là giao điểm của $(P_1)$ và đường thẳng $d \Rightarrow M\left(-\sqrt{4-a};a\right)$, $N\left(\sqrt{4-a};a\right)$

$\Rightarrow MN=2\sqrt{4-a}$.

- Nhận thấy: $(P_2)$ là parabol có phương trình $y=-\dfrac{a}{4}x^2+a$.

- Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta được:

$$S_1=2\int_a^4\sqrt{4-y}.\mathrm{d}y=-\frac{4}{3}\left((4-y)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_a^4=\frac{4}{3}(4-a)\sqrt{4-a}.$$

$$S_2=2\int_0^2\left(-\frac{a}{4}x^2+a\right).\mathrm{d}x=2\left(-\frac{ax^3}{12}+ax\right)\Big|_0^2=\frac{8a}{3}.$$

- Theo giả thiết: $S_1=S_2 \Rightarrow \dfrac{4}{3}(4-a)\sqrt{4-a}=\dfrac{8a}{3} \Leftrightarrow (4-a)^3=4a^2$

$\Leftrightarrow a^3-8a^2+48a=64$.

**Câu 49.** Cho số phức $z$ thỏa mãn điều kiện $|z-1|=\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z+i|+|z-2-i|$ bằng

**A.** $8\sqrt{2}$. **B.** $4$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$, ta có

$|z-1|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |x-1+yi|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=2 \Leftrightarrow x^2+y^2=2x+1$ (*).

Lại có

$T = |z+i| + |z-2-i| = |x+(y+1)i| + |x-2+(y-1)i|$

$= \sqrt{x^2+y^2+2y+1} + \sqrt{x^2+y^2-4x-2y+5}$

Kết hợp với (*) ta được

$T = \sqrt{2x+2y+2} + \sqrt{6-2x-2y} = \sqrt{2(x+y)+2} + \sqrt{6-2(x+y)}$

Đặt $T = x+y$, khi đó $T = f(t) = \sqrt{2t+2} + \sqrt{6-2t}$ với $t \in [-1;3]$.

**Cách 1:** Sử dụng phương pháp hàm số

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2t+2}} - \dfrac{1}{\sqrt{6-2t}}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Mà $f(1) = 4, f(-1) = 2\sqrt{2}, f(3) = 2\sqrt{2}$. Vậy $\max f(t) = f(1) = 4$.

**Cách 2:** Sử dụng phương pháp đại số

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$T = \sqrt{2t+2} + \sqrt{6-2t} \le \sqrt{(1+1).8} = 4$.

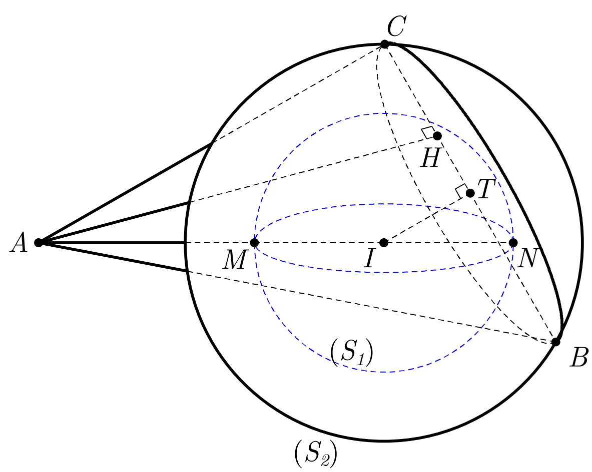
Đẳng thức xảy ra khi $t = 1$.

**Câu 50.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1):(x+4)^2+y^2+z^2=16$, $(S_2):(x+4)^2+y^2+z^2=36$ và điểm $A(4;0;0)$. Đường thẳng $\Delta$ di động nhưng luôn tiếp xúc với $(S_1)$, đồng thời cắt $(S_2)$ tại hai điểm $B, C$. Tam giác $ABC$ có thể có diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

**A.** $24\sqrt{5}$. **B.** $48$. **C.** $72$. **D.** $28\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**




$(S_1), (S_2)$ có cùng tâm $I(-4;0;0)$ và lần lượt có bán kính là $r_1 = 4, r_2 = 6$.

Gọi $T$ là hình chiếu của $I$ trên $d$, ta được $TB = \sqrt{IB^2 - IT^2} = 2\sqrt{5}$, tức $BC = 4\sqrt{5}$.

Gọi $(P)$ là tiếp diện của $(S_1)$ tại $T$, khi đó $\Delta$ qua $T$ và nằm trong $(P)$.

Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ trên $d$, ta có $AH \le AT$, dấu bằng xảy ra khi $d \perp AT$.

Gọi $M$, $N$ là các giao điểm của đường thẳng $AI$ và $(S_1)$ với $AM < AN$. Dễ thấy $AN = 12$ và đây cũng chính là độ dài lớn nhất của $AT$.

Lúc này ta có $AH \le AN = 12$, bằng xảy ra khi $d \perp AN$.

Vậy diện tích lớn nhất của tam giác $ABC$ là $24\sqrt{5}$.