SỞ GD&ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THPT TĨNH GIA 1

(Đề thi có 50 câu, gồm 06 trang)

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2022 - 2023
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút
(không kể thời gian phát đề)

Họ và tên: .... Số báo danh: .... **Mã đề 111**

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\sin 2x+1}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,|\,k\in Z\}$. **B.** $D=\mathbb{R}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

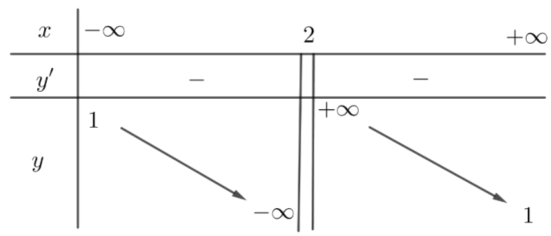
Câu 2: Có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh từ 40 học sinh lớp $11A$ để làm một ban bầu cử gồm một trưởng ban, một phó ban và bốn ủy viên?

A. A_{40}^{6}. **B.** $A_{40}^{2}.C_{38}^{4}$. **C.** $C_{40}^{2}.A_{38}^{4}$. **D.** $2!C_{38}^{4}$.

Câu 3: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $5;10;15;20;25;...$ Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n=5(n-1)$. **B.** $u_n=5n$. **C.** $u_n=5+n$. **D.** $u_n=5.n+1$.

Câu 4: Bảng biến thiên dưới đây là của hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{2x+2}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x+3}{2+x}$.

Câu 5: Cho $a>1$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. $\dfrac{1}{a^{2016}}<\dfrac{1}{a^{2017}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$. **C.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$. **D.** $a^{-\sqrt{3}}>\dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

Câu 6: Biết (H) là đa diện đều loại $\{5;3\}$ với số đỉnh và số cạnh lần lượt là a và b. Tổng $a+b$ là:

A. $a+b=40$. **B.** $a+b=50$. **C.** $a+b=32$. **D.** $a+b=42$.

Câu 7: Cho khối trụ có bán kính hình tròn đáy bằng r và chiều cao bằng h. Hỏi nếu tăng chiều cao lên 2 lần và tăng bán kính đáy lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

A. 18 lần. **B.** 6 lần. **C.** 36 lần. **D.** 12 lần

Câu 8: Cho tam giác ABC vuông tại A. Khi quay tam giác đó quanh cạnh góc vuông AB, đường gấp khúc BCA tạo thành hình tròn xoay nào trong bốn hình sau đây.

A. Hình nón. **B.** Hình trụ. **C.** Hình cầu. **D.** Mặt nón.

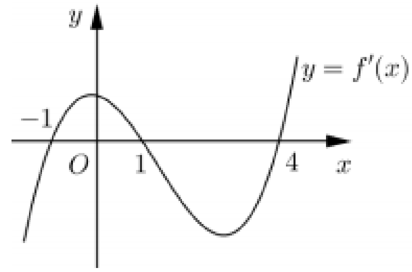
Câu 9: Biết $F(x)=e^x+x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

A. $2e^x+2x^2+C.$ **B.** $\dfrac{1}{2}e^{2x}+x^2+C.$ **C.** $\dfrac{1}{2}e^{2x}+2x^2+C.$ **D.** $e^{2x}+4x^2+C.$

Câu 10: Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+2\sin x\right]\mathrm{d}x=5$.

A. $I=7$ **B.** $I=5+\dfrac{\pi}{2}$ **C.** $I=3$ **D.** $I=5+\pi$

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng



A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 12: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC).

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	||	$-$	
y	$+\infty$	↘	1 || $-\infty$	↗	$+\infty$ || 1	↘	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 14 : Trong các mệnh đề nào sau

I. $\int f^2(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)^2$ với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

II. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

II. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

IV. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Số mệnh đề đúng là

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Câu 15: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2-4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = 1, m = 5$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

Câu 16: Với n là số nguyên dương thỏa mãn $3C_{n+1}^3 - 3A_n^2 = 52(n-1)$. Trong khai triển biểu thức $(x^3 + 2y^2)^n$, gọi T_k là số hạng mà tổng số mũ của x và y của số hạng đó bằng 34. Hệ số của T_k là

A. 54912. **B.** 1287. **C.** 2574. **D.** 41184.

Câu 17: Cắt khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$ bởi các mặt phẳng $(MN'P')$ và (MNP') ta được những khối đa diện nào?

A. Ba khối tứ diện.
B. Hai khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.
C. Hai khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác.
D. Một khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.

Câu18: Cho $a, b > 0$, nếu $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$ thì giá trị của ab bằng

A. 2^9. **B.** 8. **C.** 2^{18}. **D.** 2.

Câu 19: Cho số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018} = \frac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

A. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a = \frac{1}{2}$. **D.** $a = -\frac{1}{2}$.

Câu 20: Một khối cầu ngoại tiếp khối lập phương. Tỉ số thể tích giữa khối cầu và khối lập phương là

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3\pi\sqrt{3}}{8}$.

Câu 21: Biết $I=\int\limits_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)dx=a\ln 5+b\ln 3+c$ trong đó a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. $T=9$. **B.** $T=11$. **C.** $T=8$. **D.** $T=10$.

Câu 22: Cho tứ diện $SABC$ có các cạnh SA,SB,SC đôi một vuông góc với nhau. Biết $SA=3a,SB=4a,SC=5a$ Tính theo a thể tích V của khối tứ diện $SABC$

A. $V=10a^3$ **B.** $V=20a^3$ **C.** $V=\frac{5a^3}{2}$ **D.** $V=5a^3$

Câu 23: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+2}{3-2x}\ge 0$ là:

A. $T=\left(-2;\frac{1}{3}\right]$ **B.** $T=\left[-2;\frac{1}{3}\right]$ **C.** $T=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ **D.** $T=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$

Câu 24: Tìm tập xác định của hàm số: $y=2^{\sqrt{x}}+\log\left(3-x\right)$

A. $\left[0;+\infty\right)$. **B.** $\left(0;3\right)$. **C.** $\left(-\infty;3\right)$. **D.** $\left[0;3\right)$.

Câu 25: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{3a^3}{8}$ **B.** $V=\frac{9a^3}{8}$ **C.** $V=\frac{a^3}{8}$ **D.** $V=\frac{3a^3}{4}$

Câu 26: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sqrt{\sin x+\cos x+2}+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+m-1=0$ có nghiệm. Số phần tử của S là

A. 18. **B.** 19. **C.** 6. **D.** 7.

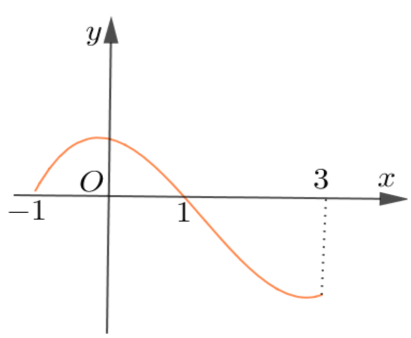
Câu 27: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ và $\left(A'BC\right)$, thì $\cos\alpha$ bằng

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{4}{7}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R=1$ bằng

A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Câu 29: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau



Biết $f\left(-1\right)+f\left(0\right)-2f\left(1\right)=f\left(3\right)-f\left(2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x-2\right)$ trên đoạn $\left[1;5\right]$.

A. $f(2)$. **B.** $f(1)$. **C.** $f(3)$. **D.** $f(-1)$.

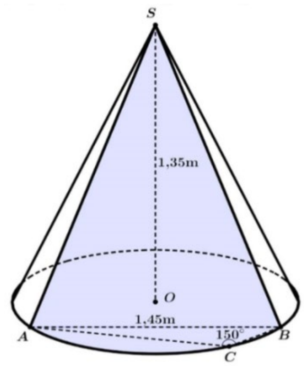
Câu 30: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-\frac{1}{3}$ có đồ thị là (C). Biết có duy nhất một giá trị m_0 để đường thẳng $d: y=mx-\frac{1}{3}$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A cố định và $S_{OBC}=2S_{OAB}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $m_0\in(0;1)$. **B.** $m_0\in(1;2)$. **C.** $m_0\in(2;3)$. **D.** $m_0\in(3;4)$.

Câu 31: Cho hình trụ có O, O' là tâm của hai đáy. Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A, B cùng thuộc đường tròn đáy (O) và C, D cùng thuộc đường tròn đáy (O') sao cho $AB=a\sqrt{3}, BC=2a$ đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc 60^0. Thể tích của khối trụ bằng

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $2\pi a^3\sqrt{3}$. **C.** $\pi a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 32: Cửa hàng A có đặt trước sảnh một cái nón lớn với chiều cao $1,35$ m và sơn cách điệu hoa văn trang trí một phần mặt ngoài của hình nón ứng với cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ như hình vẽ. Biết $AB=1,45$ m, $\widehat{ACB}=150°$ và giá tiền trang trí là 2.000.000 đồng mỗi mét vuông. Hỏi số tiền **(làm tròn đến hàng nghìn)** mà cửa hàng A cần dùng để trang trí là bao nhiêu?



A. 4.215.000 đồng. **B.** 4.510.000 đồng. **C.** 3.021.000 đồng. **D.** 3.008.000 đồng.

Câu 33: Có bảo nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y=\left|2x^3-2mx+3\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 12. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 7.

Câu 34: Trong năm đầu tiên đi làm, anh A được nhận lương là 10 triệu đồng mỗi tháng. Cứ hết một năm, anh A lại được tăng lương, mỗi tháng năm sau tăng 12% so với mỗi tháng năm trước. Mỗi khi lĩnh lương anh A đều cất đi phần lương tăng so với năm ngay trước để tiết kiệm mua ô tô. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì anh A mua được ô tô giá 500 triệu biết rằng anh A được gia đình hỗ trợ 32% giá trị chiếc xe?

A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 10.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh $3a$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$, góc giữa (SAB) và (SCB) bằng 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{24}$. **D.** $\frac{9\sqrt{2}a^3}{8}$.

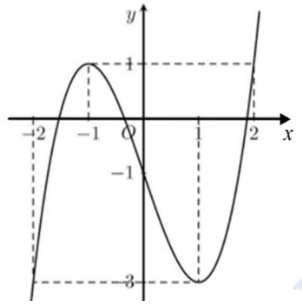
Câu 36: Ta có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2022;2022)$ để hàm số $y=x+m+\sqrt{x^2+2(m+1)x+m^2+2m+4}+\log_2\left(x-m+\sqrt{2x^2+1}\right)$ Ta có tập xác định là $D=\mathbb{R}$?

A. 2020. **B.** 2023. **C.** 2022. **D.** 2021.

Câu 37: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(9^x-10.3^{x+1}+81\right)\sqrt{4-\log_2(2x)}\ge 0$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 5.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f(x)+2m\right)+1=f(x)+2m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $[-1;1]$ là



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x)+(x+1)f'(x)=e^x$ và $f(0)=\frac{1}{2}$.Tính $f(2)$

A. $f(2)=\frac{e}{3}$. **B.** $f(2)=\frac{e}{6}$. **C.** $f(2)=\frac{e^2}{3}$. **D.** $f(2)=\frac{e^2}{6}$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$. Biết

$f(2x-1)+2f(2x-3)=24x^2-28x+20, \forall x\in\mathbb{R}$, tính $\int_0^2 f(x)\,dx$?

A. 24. **B.** 36. **C.** 12. **D.** -36.

Câu 41: Mỗi lượt, ta gieo một con súc sắc (loại 6 mặt, cân đối) và một đồng xu (cân đối). Tính xác suất để trong 3 lượt gieo như vậy, có ít nhất một lượt gieo được kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp.

A. $\frac{397}{1728}$. **B.** $\frac{1385}{1728}$. **C.** $\frac{1331}{1728}$. **D.** $\frac{1603}{1728}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $4a$, ΔSAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $\widehat{ABC}=60^\circ$. Gọi M là điểm trên cạnh CD sao cho $CM=3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM bằng

A. $\frac{4\sqrt{51}}{17}a$. **B.** $\frac{4\sqrt{39}}{13}a$. **C.** $\frac{8\sqrt{39}}{13}a$. **D.** $\frac{8\sqrt{51}}{17}a$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)=\log_2\left(\frac{2^x+2}{2^x+4}\right)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$f\left(2x^2+2x-\left(3-x^2\right)^3+3\right)+f\left(\left(x+m\right)^3+2m-6\right)\geq -1$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;3]$.

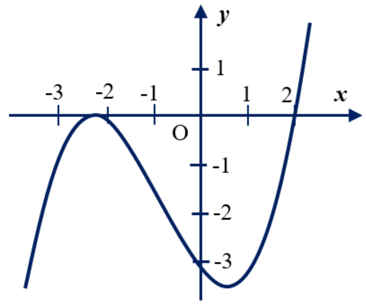
A. $m\in\left[\frac{13}{4};+\infty\right)$ **B.** $m\in\left[\frac{15}{4};+\infty\right)$ **C.** $m\in[-9;+\infty)$ **D.** $m\in[3;+\infty)$

Câu 44: Có bao nhiêu số nguyên của x sao cho tồn tại số thực y thỏa m

$2\log_3(x+y+1)=\log_2\left(x^2+2x+2y^2+1\right)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để bất phương trình $\left[x\left(m-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}+m^2-3\right].\left(2^{f(x)}-1\right)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số tập con của tập hợp S là



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 46: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m (với $m\in\mathbb{Z}$; $\left|m\right|\le 2021$) để đồ thị hàm số $y=\left|m+f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 2026. **B.** 2025. **C.** 4. **D.** 2022.

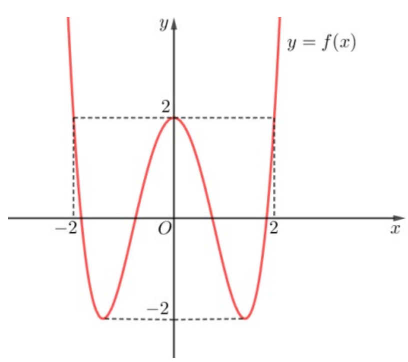
Câu 47: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 48: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[0;20\right]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right)=\left|\left|2f\left(x\right)+m+4\right|-f(x)-3\right|$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$ không bé hơn 1?

A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

Câu 49: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, Q, R lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, $A'B'$, BC, $B'C'$ và P, S lần lượt là trọng tâm của các tam giác $AA'B$, $CC'B$. Tỉ số thể tích khối đa diện $MNRQPS$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{1}{9}$. **B.** $\dfrac{5}{54}$. **C.** $\dfrac{1}{10}$. **D.** $\dfrac{2}{27}$.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y, AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất khi tổng $(x + y)$ bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

----------- HẾT ----------

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
ĐA	**B**	**B**	**B**	**C**	**D**	**B**	**A**	**A**	**C**	**A**	**C**	**B**	**D**	**A**	**B**	**D**	**A**	**A**	**A**	**C**	**C**	**B**	**A**	**D**	**A**
Câu	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
ĐA	**C**	**A**	**D**	**C**	**A**	**C**	**D**	**A**	**C**	**D**	**C**	**A**	**A**	**D**	**C**	**A**	**D**	**A**	**A**	**C**	**A**	**D**	**B**	**B**	**C**

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\sin 2x+1}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in Z\}$. **B.** $D=\mathbb{R}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in Z\right\}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in Z\right\}$.

Câu 2: Có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh từ 40 học sinh lớp $11A$ để làm một ban bầu cử gồm một trưởng ban, một phó ban và bốn ủy viên?

A. A_{40}^{6}. **B.** $A_{40}^{2}.C_{38}^{4}$. **C.** $C_{40}^{2}.A_{38}^{4}$. **D.** $2!C_{38}^{4}$.

Câu 3: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $5;10;15;20;25;\ldots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n=5(n-1)$. **B.** $u_n=5n$. **C.** $u_n=5+n$. **D.** $u_n=5.n+1$.

Câu 4: Bảng biến thiên dưới đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	1 ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1

A. $y=\frac{x-3}{x-2}$. **B.** $y=\frac{x-1}{2x+2}$. **C.** $y=\frac{x+1}{x-2}$. **D.** $y=\frac{x+3}{2+x}$.

Câu 5: Cho $a>1$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. $\frac{1}{a^{2016}}<\frac{1}{a^{2017}}$. **B.** $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$. **C.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$. **D.** $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

Câu 6: Biết (H) là đa diện đều loại $\{5;3\}$ với số đỉnh và số cạnh lần lượt là a và b. Tổng $a+b$ là:

A. $a+b=40$. **B.** $a+b=50$. **C.** $a+b=32$. **D.** $a+b=42$.

Câu 7: Cho khối trụ có bán kính hình tròn đáy bằng r và chiều cao bằng h. Hỏi nếu tăng chiều cao lên 2 lần và tăng bán kính đáy lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

A. 18 lần. **B.** 6 lần. **C.** 36 lần. **D.** 12 lần

Câu 8: Cho tam giác ABC vuông tại A. Khi quay tam giác đó quanh cạnh góc vuông AB, đường gấp khúc BCA tạo thành hình tròn xoay nào trong bốn hình sau đây.

A. Hình nón. **B.** Hình trụ. **C.** Hình cầu. **D.** Mặt nón.

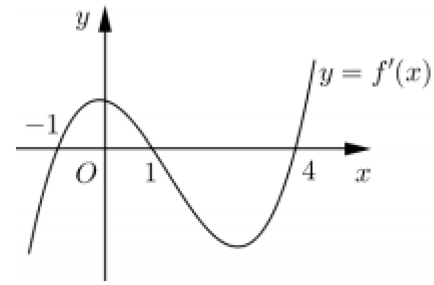
Câu 9: Biết $F(x)=e^x+x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

A. $2e^x+2x^2+C.$ **B.** $\frac{1}{2}e^{2x}+x^2+C.$ **C.** $\frac{1}{2}e^{2x}+2x^2+C.$ **D.** $e^{2x}+4x^2+C.$

Câu 10: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+2\sin x\right]\mathrm{d}x=5$.

A. $I=7$ **B.** $I=5+\frac{\pi}{2}$ **C.** $I=3$ **D.** $I=5+\pi$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng



A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 12: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC).

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$1 \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert 1$	$\searrow$	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 14 : Trong các mệnh đề nào sau

I. $\int f^2(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)^2$ với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

II. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

II. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

IV. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Số mệnh đề đúng là

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Câu 15: Tìm các giá trị thực của tham số *m* để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2-4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = 1, m = 5$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

Câu 16: Với n là số nguyên dương thỏa mãn $3C_{n+1}^3 - 3A_n^2 = 52(n-1)$. Trong khai triển biểu thức $(x^3 + 2y^2)^n$, gọi T_k là số hạng mà tổng số mũ của x và y của số hạng đó bằng 34. Hệ số của T_k là

A. 54912. **B.** 1287. **C.** 2574. **D.** 41184.

Câu 17: Cắt khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$ bởi các mặt phẳng $(MN'P')$ và (MNP') ta được những khối đa diện nào?

A. Ba khối tứ diện.
B. Hai khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.
C. Hai khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác.
D. Một khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.

Câu18. Cho $a, b > 0$, nếu $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$ thì giá trị của ab bằng

A. 2^9. **B.** 8. **C.** 2^{18}. **D.** 2.

Câu 19: Cho số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018} = \frac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

A. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a = \frac{1}{2}$. **D.** $a = -\frac{1}{2}$.

Câu 20: Một khối cầu ngoại tiếp khối lập phương. Tỉ số thể tích giữa khối cầu và khối lập phương là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{3\pi\sqrt{3}}{8}$.

Câu 21: Biết $I=\int\limits_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)dx=a\ln 5+b\ln 3+c$ trong đó a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. $T=9$. **B.** $T=11$. **C.** $T=8$. **D.** $T=10$.

Câu 22: Cho tứ diện $SABC$ có các cạnh SA,SB,SC đôi một vuông góc với nhau. Biết $SA=3a,SB=4a,SC=5a$ Tính theo a thể tích V của khối tứ diện $SABC$

A. $V=10a^3$ **B.** $V=20a^3$ **C.** $V=\dfrac{5a^3}{2}$ **D.** $V=5a^3$

Câu 23: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+2}{3-2x}\geq 0$ là:

A. $T=\left(-2;\dfrac{1}{3}\right]$ **B.** $T=\left[-2;\dfrac{1}{3}\right]$ **C.** $T=\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ **D.** $T=\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right]$

Câu 24: Tìm tập xác định của hàm số: $y=2^{\sqrt{x}}+\log\left(3-x\right)$

A. $\left[0;+\infty\right)$. **B.** $\left(0;3\right)$. **C.** $\left(-\infty;3\right)$. **D.** $\left[0;3\right)$.

Câu 25: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{3a^3}{8}$ **B.** $V=\dfrac{9a^3}{8}$ **C.** $V=\dfrac{a^3}{8}$ **D.** $V=\dfrac{3a^3}{4}$

Câu 26: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sqrt{\sin x+\cos x+2}+\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+m-1=0$ có nghiệm. Số phần tử của S là

A. 18. **B.** 19. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3\sqrt{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2}+\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+m-1=0$.

Đặt $t=\sqrt{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2}\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=t^2-2$, điều kiện: $t\in\left[\sqrt{2-\sqrt{2}};\sqrt{2+\sqrt{2}}\right]$.

Khi đó ta có phương trình $t^2+3t-3=-m$ (2)

Ta đi lập bảng biến thiên của hàm số $y=t^2+3t-3$ trên đoạn $\left[\sqrt{2-\sqrt{2}};\sqrt{2+\sqrt{2}}\right]$.

t	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}$
$y=t^2+3t-3$	$3\sqrt{2-\sqrt{2}}-1-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2+\sqrt{2}}-1+\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên ta thấy, để phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow(2)$ có nghiệm $t\in\left[-\sqrt{2}+2;\sqrt{2}+2\right]$

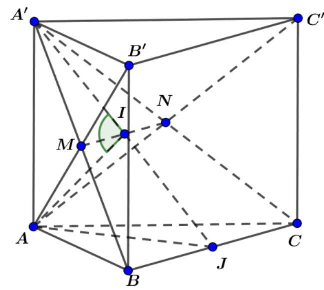
$\Leftrightarrow 3\sqrt{2-\sqrt{2}}-1-\sqrt{2}\leq -m\leq 3\sqrt{2+\sqrt{2}}-1+\sqrt{2}\Leftrightarrow -3\sqrt{2+\sqrt{2}}+1-\sqrt{2}\leq m\leq -3\sqrt{2-\sqrt{2}}+1+\sqrt{2}$.

Vì $m \in Z \Rightarrow m = -5; -4; -3; -2; -1; 0$.

Câu 27: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ và $\left(A'BC\right)$, thì $\cos\alpha$ bằng

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{4}{7}$.

Lời giải



Giả sử cạnh của hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài bằng a.

Gọi $M = A'B \cap AB'$ và $N = A'C \cap AC'$.

Gọi J là trung điểm BC. $AJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'J = \sqrt{AA'^2 + AJ^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a \Rightarrow A'I = \frac{1}{2}A'J = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.

Xét tam giác $\Delta A'IA$ có: $\cos\widehat{A'IA} = \frac{AI^2 + A'I^2 - AA'^2}{2.AI.A'I} = \frac{-1}{7} \Rightarrow \cos\alpha = \cos\left(AI, A'I\right) = \cos\left(180^\circ - \widehat{A'IA}\right) = \frac{1}{7}$.

Câu 28: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1 \ (1)$. Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R = 1$ bằng

A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Lời giải

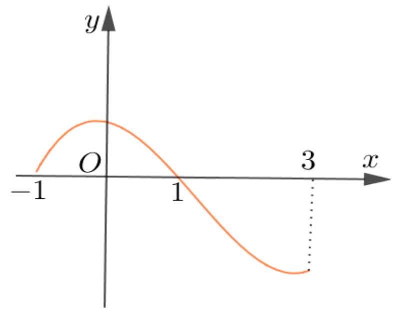
$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$. Để đồ thị hs (1) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Gọi $A(0;1), B(\sqrt{m}; -m^2+1), C(-\sqrt{m}; -m^2+1)$ là các điểm cực trị của đồ thị hs (1), $I(0; -m^2+1)$ là trung điểm BC.

Ta có $AI = m^2, AB = AC = \sqrt{m + m^4}$. Suy ra $\frac{1}{2}AI.BC = \frac{AB.AC.BC}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{AB.AC}{2AI}$

$$\Leftrightarrow \frac{2m^2}{m+m^4} = 1 \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 0 & (l) \\ m = 1 & (n) \\ m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & (l) \\ m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & (n) \end{array}\right.$$

Câu 29: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$. Đồ thị $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau

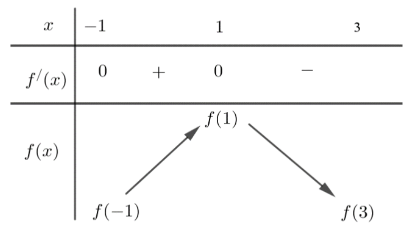


Biết $f\left(-1\right)+f\left(0\right)-2f\left(1\right)=f\left(3\right)-f\left(2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x-2\right)$ trên đoạn $\left[1;5\right]$.

A. $f(2)$. **B.** $f(1)$. **<u>C.</u>** $f(3)$. **D.** $f(-1)$.

Lời giải

Bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$



Đặt $t=x-2$, $\forall x\in\left[1;5\right]$ ta có: $1\le x\le 5\Leftrightarrow -1\le x-2\le 3\Rightarrow t\in\left[-1;3\right]$

Khi đó hàm số $g\left(x\right)=f\left(x-2\right)$ trở thành $y=f\left(t\right)$ với $t\in\left[-1;3\right]$.

Do đó, giá trị lớn nhất của hàm số $g=f\left(x-3\right)$ trên đoạn $\left[1;5\right]$ bằnggiá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(t\right)$ trên đoạn $\left[-1;3\right]$.

Từ bảng biến thiên ta có $f\left(0\right)<f\left(1\right),f\left(2\right)<f\left(1\right)$ vậy $f\left(0\right)+f\left(2\right)<2f\left(1\right)$

Khi đó $f\left(-1\right)+f\left(0\right)-2f\left(1\right)=f\left(3\right)-f\left(2\right)\Leftrightarrow f\left(0\right)+f\left(2\right)-2f\left(1\right)=f\left(3\right)-f\left(-1\right)$

$\Rightarrow f\left(3\right)-f\left(-1\right)<0\Rightarrow f\left(3\right)<f\left(-1\right)$

Ta có: $\min\limits_{[1;5]}f\left(x-2\right)=\min\limits_{[-1;3]}f\left(t\right)=f\left(3\right)$ khi $t=3$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x-2\right)$ bằng $f\left(3\right)$ khi $x=5$.

Câu 30: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-\frac{1}{3}$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Biết có duy nhất một giá trị m_0 để đường thẳng $d:y=mx-\frac{1}{3}$ cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại ba điểm phân biệt A, B, C với A cố định và $S_{OBC}=2S_{OAB}$. Chọn khẳng định đúng?

<u>A.</u> $m_0\in\left(0;1\right)$. **B.** $m_0\in\left(1;2\right)$. **C.** $m_0\in\left(2;3\right)$. **D.** $m_0\in\left(3;4\right)$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-\frac{1}{3}=mx-\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^3-2x^2+\left(3-m\right)x=0\Leftrightarrow x\left[\frac{1}{3}x^2-2x+\left(3-m\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \frac{1}{3}x^2-2x+3-m=0\ (2)\end{array}\right.$$

(C) cắt d tại ba điểm phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{1}{3}.0^2 - 2.0 + 3 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 3 \end{cases}$ (*)

Khi đó $x_B; x_C$ là nghiệm của phương trình (2) và theo định lí Vi-et ta có $x_B + x_C = 6; x_B x_C = 9 - 3m$. Suy ra $A\left(0; -\frac{1}{3}\right); B\left(x_B; mx_B - \frac{1}{3}\right); C\left(x_C; mx_C - \frac{1}{3}\right)$.

Ta có: $S_{OBC} = 2S_{OAB} \Leftrightarrow BC = 2AB \Leftrightarrow \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = 2\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_C - x_B)^2 + \left[m(x_C - x_B)^2\right]} = 2\sqrt{(x_B)^2 + m^2(x_B)^2} \Leftrightarrow (x_C - x_B)^2(1 + m^2) = 4x_B^2(1 + m^2)$

$\Leftrightarrow (x_C - x_B)^2 = 4x_B^2 \Leftrightarrow (x_C + x_B)^2 - 4x_B x_C = 4x_B^2 \Leftrightarrow 36 = 4x_B(x_B + x_C) \Leftrightarrow 3 = 2x_B \Leftrightarrow x_B = \frac{3}{2}$.

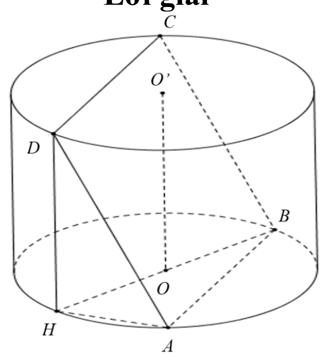
Nên $x_C = \frac{9}{2}$.Thay $x_B = \frac{3}{2}$, $x_C = \frac{9}{2}$ vào (2) ta có: $m = \frac{3}{4}$.

Câu 31: Cho hình trụ có O, O' là tâm của hai đáy. Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A, B cùng thuộc đường tròn đáy (O) và C, D cùng thuộc đường tròn đáy (O') sao cho $AB = a\sqrt{3}, BC = 2a$ đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt

phẳng đáy hình trụ góc 60^0. Thể tích của khối trụ bằng

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $2\pi a^3\sqrt{3}$. **<u>C.</u>** $\pi a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi H là giao điểm của OB với đường tròn đáy nên $AH \perp AB$
Ta có: $ABCD$ là hình chữ nhật nên $DA \perp AB$

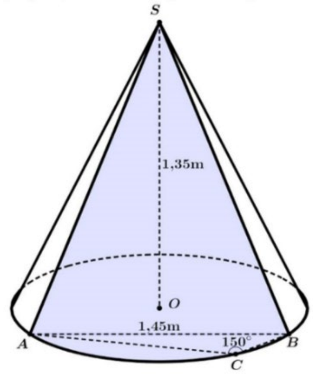
Khi đó: góc giữa $(ABCD)$ với mặt phẳng đáy bằng $\widehat{DAH} = 60^0$

Tam giác DAH vuông tại H có $h = DH = DA.\sin 60^0 = a\sqrt{3}$ và $AH = DA.\cos 60^0 = a$

Tam giác BAH vuông tại A có $BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a \Rightarrow r = \frac{BH}{2} = a$

Thể tích hình trụ là: $V = h\pi r^2 = a\sqrt{3}.\pi.a^2 = \pi a^3\sqrt{3}$

Câu 32: Cửa hàng A có đặt trước sảnh một cái nón lớn với chiều cao $1,35$ m và sơn cách điệu hoa văn trang trí một phần mặt ngoài của hình nón ứng với cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ như hình vẽ. Biết $AB = 1,45$ m, $\widehat{ACB} = 150°$ và giá tiền trang trí là 2.000.000 đồng mỗi mét vuông. Hỏi số tiền **(làm tròn đến hàng nghìn)** mà cửa hàng A cần dùng để trang trí là bao nhiêu?

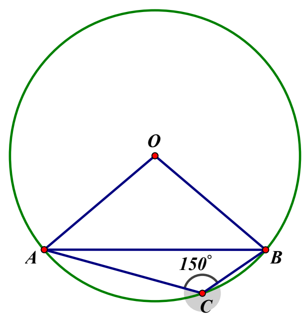


A. 4.215.000 đồng. **B.** 4.510.000 đồng. **C.** 3.021.000 đồng. **D.** 3.008.000 đồng.

Lời giải

Bán kính đáy của hình nón là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ta có: $r = \dfrac{AB}{2\sin \widehat{ACB}} = \dfrac{1,45}{2\sin 150°} = 1,45 \Rightarrow \Delta OAB$ đều, tức là $\widehat{AOB} = 60°$. Do đó diện tích mặt được sơn chiếm $\dfrac{60}{360} = \dfrac{1}{6}$ diện tích mặt xung quanh của nón.



Vì vậy số tiền cần sơn là $\dfrac{1}{6}\pi rl.2.10^6 = \dfrac{1}{6}\pi.1,45.\sqrt{(1,45)^2+(1,35)^2}.2.10^6 \approx 3\,008\,000$ đồng.

Câu 33: Có bảo nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y = |2x^3 - 2mx + 3|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 12. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 7.

Lời giải

Xét $g(x) = 2x^3 - 2mx + 3$. Ta có $g'(x) = 6x^2 - 2m$ và $g(1) = 5 - 2m$.

Để hàm số $y = |2x^3 - 2mx + 3|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì có hai trường hợp sau

Trường hợp 1: Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và $g(1) \ge 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 2m \ge 0, \forall x > 1 \\ 5 - 2m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 3x^2, \forall x > 1 \\ m \le \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \le \dfrac{5}{2}.$$

Kết hợp giả thiết suy ra có 12 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Trường hợp 2: Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$ và $g(1) \le 0$.

Điều này không xảy ra vì $\lim\limits_{x\to+\infty}(6x^2 - 2m) = +\infty > 0$.

Vậy có 12 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 34: Trong năm đầu tiên đi làm, anh A được nhận lương là 10 triệu đồng mỗi tháng. Cứ hết một năm, anh A lại được tăng lương, mỗi tháng năm sau tăng 12% so với mỗi tháng năm trước. Mỗi khi lĩnh lương anh A đều cất đi phần lương tăng so với năm ngay trước để tiết kiệm mua ô tô. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì anh A mua được ô tô giá 500 triệu biết rằng anh A được gia đình hỗ trợ 32% giá trị chiếc xe?

A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 10.

Lời giải

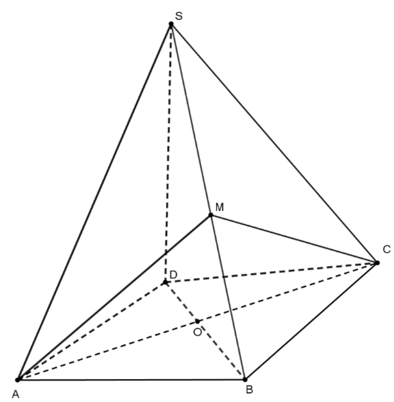
Số tiền anh A cần tiết kiệm là $500-500.0,32=340$ (triệu).
Gọi số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm đầu tiên là $u_1=10$ (triệu).
Thì số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ hai là
$u_2=u_1.(1+0,12)=u_1.1,12$ (triệu).
Số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ ba là
$u_3=u_1.(1+0,12)^2=u_1.(1,12)^2$ (triệu).
…
Số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ n là
$u_n=u_1.(1+0,12)^{n-1}=u_1.(1,12)^{n-1}$ (triệu).
Vậy số tiền mà anh A tiết kiệm được sau n năm là $12.(u_2-u_1+u_3-u_2+\cdots+u_{n-1}-u_{n-2}+u_n-u_{n-1})$
$=12.(u_n-u_1)=12.\left[u_1.(1,12)^{n-1}-u_1\right]$.
Cho $12.\left[u_1.(1,12)^{n-1}-u_1\right]=340 \Leftrightarrow (1,12)^{n-1}=\dfrac{23}{6} \Leftrightarrow n=\log_{1,12}\dfrac{23}{6}+1 \Rightarrow n=13$.
Vậy sau ít nhất 13 năm thì anh A sẽ tiết kiệm đủ tiền để mua ô tô.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh $3a$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$, góc giữa (SAB) và (SCB) bằng 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{24}$. **<u>D</u>.** $\dfrac{9\sqrt{2}a^3}{8}$.

Lời giải

Trong mặt phẳng (ABC) lấy D nằm trên đường trung trực của AC sao cho $SD\perp(ABC)$ và $\widehat{BCD}=\widehat{BAD}=90^0 \Rightarrow \widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$



Gọi $O=AC\cap BD \Rightarrow BD=\dfrac{BC^2}{OB}=2a\sqrt{3} \Rightarrow CD=a\sqrt{3}$

Dựng $AM\perp SB$, do $\Delta SAB=\Delta SCB \Rightarrow CM\perp SB \Rightarrow \widehat{((SAB),(SCB))}=\widehat{(AM,CM)}$

+ Nếu $\widehat{AMC}=60^0 \Rightarrow MC=\dfrac{OC}{\sin 30^0}=3a=BC$ vô lí vì tam giác MBC vuông tại M

+ Nếu $\widehat{AMC}=120^0 \Rightarrow MC=\dfrac{OC}{\sin 60^0}=\sqrt{3} \Rightarrow SC=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SB=\dfrac{3a\sqrt{6}}{2}$

$SD=\sqrt{SB^2-BD^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SD=\dfrac{1}{3}.\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=\dfrac{9a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 36: Ta có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2022;2022)$ để hàm số
$y=x+m+\sqrt{x^2+2(m+1)x+m^2+2m+4}+\log_2\left(x-m+\sqrt{2x^2+1}\right)$ Ta có tập xác định là $D=\mathbb{R}$?

A. 2020. **B.** 2023. **<u>C</u>.** 2022. **D.** 2021.

Lời giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m + 4 \ge 0 \\ x - m + \sqrt{2x^2+1} > 0 \end{cases}$ luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+) Ta có: $x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m + 4 = \left[x + (m+1)\right]^2 + 3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

+) $x - m + \sqrt{2x^2+1} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x + \sqrt{2x^2+1} > m, \forall x \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{2x^2+1}$ với $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 1 + \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \ge 0 \\ 2x^2 + 1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra: $x + \sqrt{2x^2+1} > m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} > m$.

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-2022; 2022) \end{cases} \Rightarrow$ có 2022 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 37: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(9^x - 10.3^{x+1} + 81\right)\sqrt{4 - \log_2(2x)} \ge 0$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

Xét bất phương trình: $\left(9^x - 10.3^{x+1} + 81\right)\sqrt{4 - \log_2(2x)} \ge 0 (1)$

ĐKXĐ: $\begin{cases} x > 0 \\ 4 - \log_2(2x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x \le 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \le 8 (*)$

Nếu $\sqrt{4 - \log_2(2x)} = 0 \Leftrightarrow x = 8$ thì (1) được thỏa mãn.

Nếu $0 < x < 8$ thì $\sqrt{2 - \log(4x)} > 0$, bất phương trình tương đương

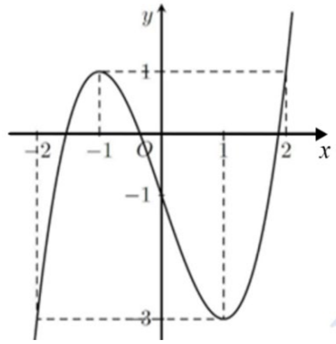
$$9^x - 10.3^{x+1} + 81 \ge 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 30.3^x + 81 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x \ge 27 \\ 3^x \le 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le 1 \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện $0 < x < 8$ ta có $x \in (0;1] \cup [3;8)$.

Vậy tập nghiệm BPT là $S = (0;1] \cup [3;8]$ Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên có tất cả 7 giá trị nguyên x thỏa mãn

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$f\left(f(x) + 2m\right) + 1 = f(x) + 2m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $[-1;1]$ là



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $f\left(f\left(x\right)+2m\right)+1=f\left(x\right)+2m \Leftrightarrow f\left(t\right)=t-1$

Với $t=f\left(x\right)+2m$

Dựa vào đồ thị ta có $f\left(t\right)=t-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=0 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=-2m-2 \\ f\left(x\right)=-2m \\ f\left(x\right)=-2m+2 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị trên $\left[-1;1\right]$, phương trình $f\left(f\left(x\right)+2m\right)+1=f\left(x\right)+2m \Leftrightarrow f\left(t\right)=t-1$ có đúng 3 nghiệm phân biệt khi $\left\{\begin{array}{l} -3\le -2m-2\le 1 \\ -3\le -2m\le 1 \\ -3\le -2m+2\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3\le 2m\le 1 \\ -1\le 2m\le 3 \Rightarrow m=\dfrac{1}{2}. \\ 1\le 2m\le 5 \end{array}\right.$

Vậy không có giá trị nguyên nào của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 39: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left(x+2\right)f\left(x\right)+\left(x+1\right)f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x$ và $f\left(0\right)=\dfrac{1}{2}$. Tính $f\left(2\right)$.

A. $f\left(2\right)=\dfrac{\mathrm{e}}{3}$. **B.** $f\left(2\right)=\dfrac{\mathrm{e}}{6}$. **C.** $f\left(2\right)=\dfrac{\mathrm{e}^2}{3}$. **D.** $f\left(2\right)=\dfrac{\mathrm{e}^2}{6}$.

Lời giải

Ta có

$\left(x+2\right)f\left(x\right)+\left(x+1\right)f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x \Leftrightarrow \left(x+1\right)f\left(x\right)+f\left(x\right)+\left(x+1\right)f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x$

$\Leftrightarrow \left[\left(x+1\right)f\left(x\right)\right]+\left[\left(x+1\right)f\left(x\right)\right]'=\mathrm{e}^x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x\left[\left(x+1\right)f\left(x\right)\right]+\mathrm{e}^x\left[\left(x+1\right)f\left(x\right)\right]'=\mathrm{e}^{2x}$

$\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^x\left(x+1\right)f\left(x\right)\right]'=\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow \int\left[\mathrm{e}^x\left(x+1\right)f\left(x\right)\right]'\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x\left(x+1\right)f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$

Mà $f\left(0\right)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow C=0$. Vậy $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}$

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$. Biết $f(2x-1)+2f(2x-3)=24x^2-28x+20, \forall x\in\mathbb{R}$, tính $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$?

A. 24. **B.** 36. **C.** 12. **D.** -36.

Lời giải

Ta có $f(2x-1)+2f(2x-3)=24x^2-28x+20, \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(2x-1)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 2f(2x-3)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (24x^2-28x+20)\mathrm{d}x = 18$$

Tính $M = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(2x-1)\,\mathrm{d}x$: Đặt $t = 2x-1 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{2} = \mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = \frac{1}{2} \to t = 0$; $x = \frac{3}{2} \to t = 2$

$\Rightarrow M = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Tính $N = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 2f(2x-3)\,\mathrm{d}x$: Đặt $t = 2x-3 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = \frac{1}{2} \to t = -2$; $x = \frac{3}{2} \to t = 0$ $\Rightarrow N = \int_{-2}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$)

Suy ra $M + N = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 18 \Rightarrow \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$.

Câu 41: Mỗi lượt, ta gieo một con súc sắc (loại 6 mặt, cân đối) và một đồng xu (cân đối). Tính xác suất để trong 3 lượt gieo như vậy, có ít nhất một lượt gieo được kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu
xuất hiện mặt sấp.

A. $\frac{397}{1728}$. **B.** $\frac{1385}{1728}$. **C.** $\frac{1331}{1728}$. **D.** $\frac{1603}{1728}$.

Lời giải

Gọi $\Omega = \left\{(x_i;y_i): x_i = \overline{1,..,6}, y_i \in \{S;N\}, i = 1,2,3\right\}$ là biến cố xuất hiện trong 3 lần gieo, với $(x_i;y_i)$ lượt gieo thứ i con súc sắc xuất hiện mặt x_i chấm, đồng xu suất hiện mặt y_i với $x_i \in \{1;2;3;4;5;6\}$ và $y_i \in \{S;N\}$.

Khi gieo 3 lần, con súc sắc và đồng xu xuất hiện mặt bất kì ta có: gieo lần 1 (lần 2 hoặc lần 3) có 6.2 số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = (6.2)^3 = 1728$. Gọi A là biến cố trong 3 lượt gieo ít nhất một lượt gieo được kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp. Khi đó biến cố A xảy ra các khả năng như sau:

TH1: Gọi biến cố A_1 chỉ có một lần gieo kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp thì A_1 có số phần tử là $n(A_1) = 11^2.3 = 363$ (do biến cố $(1;S)$ xuất hiện ở một trong 3 lần gieo có $C_3^1 = 3$ khả năng xảy ra, hai lần gieo còn lại không xuất hiện biến cố đó mỗi lần còn 11 khả năng xảy ra).

TH2: Gọi biến cố A_2 có 2 lần gieo kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp thì A_2 có số phần tử là $n(A_2) = 3.11 = 33$ (do 2 trong 3 lần gieo xuất hiện biến cố $(1;S)$ có $C_3^2 = 3$ khả năng, lần gieo còn lại không xuất hiện biến cố đó có 11 khả năng xảy ra).

TH3: Gọi biến cố A_3 cả 3 lần gieo kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp thì A_3 có số phần tử là $n(A_3) = 1$.

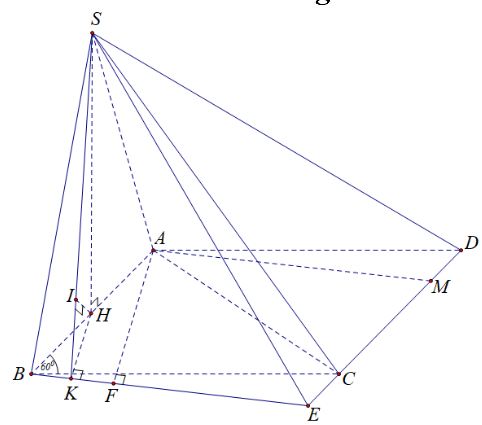
Do đó $n(A) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) = 363 + 33 + 1 = 397$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{397}{1728}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $4a$, ΔSAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi M là điểm trên cạnh CD sao cho $CM = 3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{51}}{17}a$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{39}}{13}a$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{39}}{13}a$. **D.** $\dfrac{8\sqrt{51}}{17}a$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\\ \text{Trong } (SAB),\ SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Theo giả thiết ta có: $AB=BC=4a$ và $\widehat{ABC}=60^0$ nên ΔABC là tam giác đều, cạnh $4a$.

$\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{(4a)^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}a^2$ và $SH=\dfrac{4a\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}a$.

Ta có: $AM^2=AD^2+DM^2-2AD.DM.\cos\widehat{ADM}=(4a)^2+a^2-2.4a.a.\cos 60°=13a^2$.

$\Rightarrow AM=a\sqrt{13}$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE=a$.

Khi đó, tứ giác $AMEB$ là hình bình hành $\Rightarrow BE=AM=a\sqrt{13}$.

Mặt khác, $\Delta ADM=\Delta BCE\Rightarrow S_{AMEB}=S_{ABCD}=2S_{ABC}=2.4\sqrt{3}a^2=8\sqrt{3}a^2$.

Ta có: $\begin{cases}AM\not\subset(SBE)\\AM\,//\,BE\\BE\subset(SBE)\end{cases}\Rightarrow AM\,//\,(SBE)$. Do đó $\mathrm{d}(AM,SB)=\mathrm{d}(AM,(SBE))=\mathrm{d}(A,(SBE))$.

Ta lại có: $\dfrac{\mathrm{d}(A,(SBE))}{\mathrm{d}(H,(SBE))}=\dfrac{AB}{HB}=2\Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBE))=2\mathrm{d}(H,(SBE))$.

Trong $(ABCD)$, gọi K và F lần lượt là hình chiếu của H và A lên BE.

$\Rightarrow HK=\dfrac{1}{2}AF=\dfrac{1}{2}.\dfrac{S_{AMEB}}{EB}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{8\sqrt{3}a^2}{a\sqrt{13}}=\dfrac{4\sqrt{39}a}{13}$ (do HK là đường trung bình của ΔABF).

Ta có: $\begin{cases}BE\perp HK\\BE\perp SH\ \left(\text{Do } SH\perp(ABCD)\supset BE\right)\\HK,SH\subset(SHK)\\HK\cap SH=H\end{cases}\Rightarrow BE\perp(SHK)$. Mà $BE\subset(SBE)\Rightarrow(SBE)\perp(SHK)$.

Ta lại có: $(SBE)\cap(SHK)=SK$. Trong (SHK), kẻ $HI\perp SK\,(I\in SK)\Rightarrow HI\perp(SBE)\Rightarrow \mathrm{d}(H,(SBE))=HI$.

Tam giác SHK vuông tại H, đường cao HI nên $\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{\left(2\sqrt{3}a\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{4\sqrt{39}a}{13}\right)^2}=\frac{17}{48a^2}$

. Do đó: $HI=\frac{4\sqrt{51}}{17}a$ .Vậy $d\left(AM,SB\right)=\frac{8\sqrt{51}}{17}a$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)=\log_2\left(\frac{2^x+2}{2^x+4}\right)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f\left(2x^2+2x-\left(3-x^2\right)^3+3\right)+f\left(\left(x+m\right)^3+2m-6\right)\ge -1$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[-1;3\right]$.

<u>A</u>. $m\in\left[\frac{13}{4};+\infty\right)$ **B.** $m\in\left[\frac{15}{4};+\infty\right)$ **C.** $m\in\left[-9;+\infty\right)$ **D.** $m\in\left[3;+\infty\right)$

Lời giải

$f(x)$ là hàm đồng biến, $f(u)+f(3-u)=-1$.

Bpt $\Leftrightarrow -f\left(-2x^2-2x+\left(3-x^2\right)^3\right)+f\left(\left(x+m\right)^3+2m-6\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow -2x^2-2x+\left(3-x^2\right)^3\le\left(x+m\right)^3+2m-6\Leftrightarrow 2\left(3-x^2\right)+\left(3-x^2\right)^3\le\left(x+m\right)^3+2\left(x+m\right)$ (1)

Xét hàm số $g\left(t\right)=t^3+2t$ trên **R** Ta có: $g'\left(t\right)=3t^2+2>0\ \forall t$ nên hàm số $g\left(t\right)$ đồng biến trên **R**

(1) $\Leftrightarrow 3-x^2\le x+m\Leftrightarrow m\ge -x^2-x+3\forall x\in\left[-1;3\right]$

Ta có

$\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{x\in[-1;3]}\left(-x^2-x+3\right)\Leftrightarrow m\ge\frac{13}{4}$

Câu 44: Có bao nhiêu số nguyên của x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn

$2\log_3\left(x+y+1\right)=\log_2\left(x^2+2x+2y^2+1\right)$?

<u>A.</u> 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $2\log_3\left(x+y+1\right)=\log_2\left(x^2+2x+2y^2+1\right)=2t$

$\Rightarrow\begin{cases}x+y+1=3^t\\x^2+2x+2y^2+1=4^t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+1=3^t\\\left(x+1\right)^2+2y^2=4^t\end{cases}$.

Ta có: $9^t=\left[\left(x+1\right)+y\right]^2=\left[1.\left(x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}y\right]^2\le\left(1+\frac{1}{2}\right)\left[\left(x+1\right)^2+2y^2\right]=\frac{3}{2}.4^t$

$\Rightarrow\left(\frac{9}{4}\right)^t\le\frac{3}{2}\Rightarrow t\le\frac{1}{2}$. Lại có $\left(x+1\right)^2+2y^2=4^t\Rightarrow\left(x+1\right)^2\le 4^t\le 4^{\frac{1}{2}}=2\Rightarrow x\in\left\{-2;-1;0\right\}$ (do $x\in\mathbb{Z}$).

Nếu $x=0$ ta có phương trình $2\log_3\left(y+1\right)=\log_2\left(2y^2+1\right)$. Ta thấy phương trình này có nghiệm $y=0$

Nếu $x=-1$ ta có phương trình

$2\log_3 y=\log_2 2y^2=2t\Rightarrow\begin{cases}y=3^t\\2y^2=4^t\end{cases}\Rightarrow 2.9^t=4^t\Rightarrow t=\log_{\frac{4}{9}}2\Rightarrow y=3^{\log_{\frac{4}{9}}2}$.

Ta thấy phương trình này có nghiệm $y=3^{\log_{\frac{4}{9}}2}$.

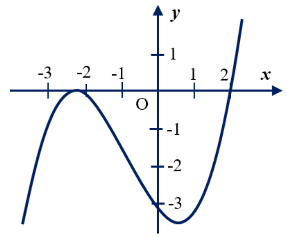
Nếu $x=-2$ ta có phương trình $2\log_3\left(y-1\right)=\log_2\left(2y^2+1\right)=2t$

$\Rightarrow\begin{cases}y-1=3^t\\2y^2+1=4^t\end{cases}\Rightarrow 2.9^t+4.3^t+3=4^t\left(*\right)$.

Ta có $4^t = 2y^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow t \geq 0 \Rightarrow 2.9^t > 4^t$. Suy ra $VT(*) > 4^t$ nên phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy có 2 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để bất phương trình $\left[x\left(m-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}+m^2-3\right].\left(2^{f(x)}-1\right)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số tập con của tập hợp S là



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Nhận xét phương trình $2^{f(x)} - 1 = 0$ có một nghiệm bội lẻ $x = 2$ nên biểu thức $2^{f(x)} - 1$ sẽ đổi dấu khi đi qua điểm $x = 2$. Do đó để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì phương trình

$x\left(m-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}+m^2-3=0$ phải có một nghiệm $x = 2 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Thử lại với $m = 1$ ta có:

$\left[x\left(1-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}-2\right]\left(2^{f(x)}-1\right)\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(1-2^{f(\sin x)}\right)\left(2^{f(x)}-1\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow 2^{f(\sin x)} \leq 1 \Leftrightarrow f(\sin x) \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 2$ luôn đúng với mọi $x \in R \Rightarrow m = 1$ thỏa mãn ycbt.

Thử lại với $m = -3$ ta có:

$\left[x\left(-3-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}+6\right]\left(2^{f(x)}-1\right)\geq 0 \Leftrightarrow -(x-2)\left(3+2^{f(\sin x)}\right)\left(2^{f(x)}-1\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow 3 + 2^{f(\sin x)} \leq 0$ (vô lý) $\Rightarrow m = -3$ không thỏa mãn ycbt. Vậy $S = \{1\}$. S có 2 tập con đó là $\{1\}$ và $\varnothing$.

Câu 46: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m (với $m \in \mathbb{Z}$; $|m| \leq 2021$) để đồ thị hàm số $y = \left|m + f(|x|)\right|$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 2026. **B.** 2025. **C.** 4. **D.** 2022.

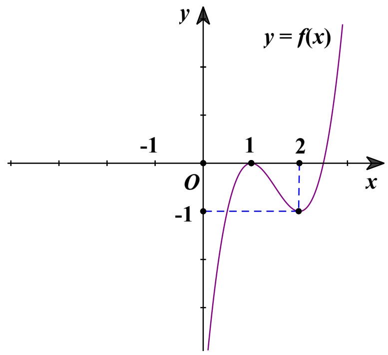
Lời giải

Từ bảng biến thiên của hàm số bậc ba $y = f(x)$, ta có $f'(x) = a\left(x^2 - 3x + 2\right)$. Suy ra $f(x) = a\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right) + d$.

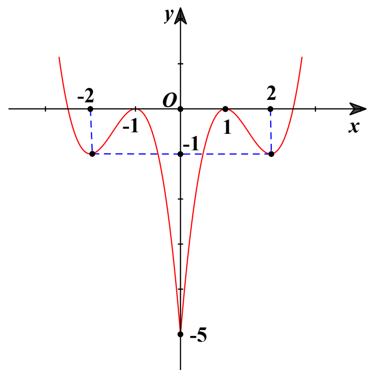
Mặt khác, $f(1) = 0$, $f(2) = -1$ nên $\begin{cases} a\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)+d=0 \\ a\left(\frac{8}{3}-\frac{12}{2}+4\right)+d=-1 \end{cases}$.

Do đó, $a = 6$ và $d = -5$ hay $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$.

Đồ thị $y = f(x)$



Đồ thị $y = f(|x|)$



Từ đồ thị ta có $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Vì hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị nên hàm số $y = m + f(|x|)$ cũng có 5 điểm cực trị (Vì đồ thị hàm số $y = m + f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị $y = f(|x|)$ bằng cách tịnh tiến theo phương trục Oy).

Số điểm cực trị của hàm số $y = |m + f(|x|)|$ bằng số cực trị của hàm số $y = m + f(|x|)$ và số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của phương trình $f(|x|) + m = 0$.

Vậy để $y = |m + f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $f(|x|) + m = 0$ có hai nghiệm đơn hoặc bội lẻ.

Ta có $f(|x|) + m = 0 \Leftrightarrow f(|x|) = -m$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ ta có: $\left[\begin{array}{l} -5 < -m \le -1 \\ 0 \le -m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le m < 5 \\ m \le 0 \end{array}\right.$ (1)

Từ giả thiết $|m| \le 2021 \Leftrightarrow -2021 \le m \le 2021$ (2)

Vậy từ (1), (2) và kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{Z}$, ta có 2026 giá trị nguyên của m

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x)) = 2$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

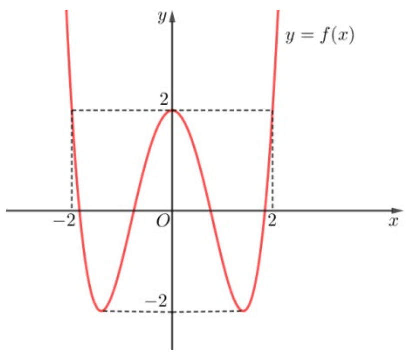
Lời giải

$$f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(\cos x\right)=1 \\ f\left(\cos x\right)=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x=a\in\left(-\infty;-1\right) & (1) \\ \cos x=b\in\left(-1;0\right) & (2) \\ \cos x=c\in\left(0;1\right) & (3) \\ \cos x=d\in\left(1;+\infty\right) & (4) \\ \cos x=e\in\left(-\infty;-1\right), e<a & (5) \\ \cos x=f\in\left(1;+\infty\right) f<d & (6) \end{array}\right.$$

Xét trên đoạn $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$ ta có: Phương trình (1), (4), (5), (6) vô nghiệm.

Phương trình (2) có 4 nghiệm, phương trình (3) có 5 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm.

Câu 48: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[0;20\right]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right)=\left|\left|2f\left(x\right)+m+4\right|-f(x)-3\right|$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$ không bé hơn 1?

A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Dựa vào hình vẽ ta có: $-2\le f(x)\le 2, \forall x\in\left[-2;2\right]$ $(*)$. $\Rightarrow 2f\left(x\right)+4\ge 0, \forall x\in\left[-2;2\right]$.

Vì $m\in\left[0;20\right]$ nên $2f\left(x\right)+m+4\ge 0$

suy ra $\left|2f\left(x\right)+m+4\right|=2f\left(x\right)+m+4, \forall x\in\left[-2;2\right]$.

Ta có: $g\left(x\right)=\left|\left|2f\left(x\right)+m+4\right|-f(x)-3\right| =\left|2f\left(x\right)+m+4-f\left(x\right)-3\right| =\left|f\left(x\right)+m+1\right|, \forall x\in\left[-2;2\right]$.

+) Với $m=0\Rightarrow g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)+1\right|$, $\forall x\in\left[-2;2\right]$.

$(*)\Leftrightarrow -1\le f\left(x\right)+1\le 3, \forall x\in\left[-2;2\right]. \Rightarrow 0\le\left|f\left(x\right)+1\right|\le 3, \forall x\in\left[-2;2\right]\Leftrightarrow 0\le g\left(x\right)\le 3, \forall x\in\left[-2;2\right]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} g\left(x\right)=0 \Rightarrow m=0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

+) Với $m\in\left[1;20\right]\Rightarrow f\left(x\right)+m+1\ge 0\Rightarrow g\left(x\right)=f\left(x\right)+m+1$.

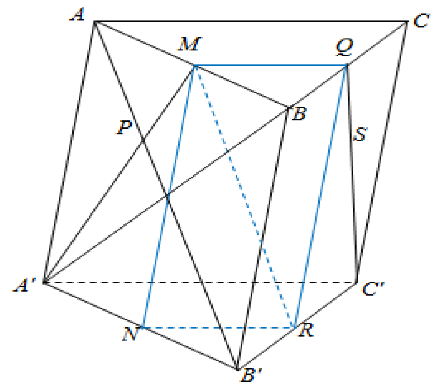
Từ $(*)$ ta có: $f\left(x\right)+m+1\ge m-1\Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} g\left(x\right)=m-1$.

Yêu cầu bài toán: $\min\limits_{[-2;2]} g\left(x\right)\ge 1\Leftrightarrow m-1\ge 1\Leftrightarrow m\ge 2 \Rightarrow m\in\left[2;20\right]$. Vậy có 19 giá trị nguyên

Câu 49: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, Q, R lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, $A'B'$, BC, $B'C'$ và P, S lần lượt là trọng tâm của các tam giác $AA'B$, $CC'B$. Tỉ số thể tích khối đa diện $MNRQPS$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{5}{54}$. **C.** $\frac{1}{10}$. **D.** $\frac{2}{27}$.

Lời giải



◆ Đặt: $V = V_{ABC.A'B'C'}$; $V_{B'.AA'C'C} = \frac{1}{3} S_{AA'C'C}.\mathrm{d}\left(B',\left(AA'C'C\right)\right) = \frac{2}{3}V$

$V_{B'.MNRQ} = \frac{1}{3}.S_{MNRQ}.\mathrm{d}\left(B',\left(MNRQ\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S_{AA'C'C}\right).\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(B',\left(AA'C'C\right)\right)\right)$

$= \left(\frac{1}{3}.S_{AA'C'C}.\mathrm{d}\left(B',\left(AA'C'C\right)\right)\right).\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.\frac{2}{3}V = \frac{1}{6}V$

$V_{P.MNRQ} = \frac{1}{3}.V_{A'.MNRQ} = \frac{1}{3}.V_{B'.MNRQ} = \frac{1}{3}.\frac{1}{6}V = \frac{1}{18}V$

◆ $V_{A.BB'C'C} = \frac{1}{3} S_{BB'C'C}.\mathrm{d}\left(A,\left(BB'C'C\right)\right) = \frac{2}{3}V$

$S_{\Delta QRC'} = \frac{1}{2} S_{QRC'C} = \frac{1}{4} S_{BB'C'C}$; $S_{\Delta QRS} = \frac{1}{3} S_{QRC'} = \frac{1}{3}.\frac{1}{4} S_{BB'C'C} = \frac{1}{12} S_{BB'C'C}$

$V_{A.QRS} = \frac{1}{3} S_{\Delta QRS}.\mathrm{d}\left(A,\left(QRS\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{12}S_{BB'C'C}\right).\left(\mathrm{d}\left(A,\left(BB'C'C\right)\right)\right)$

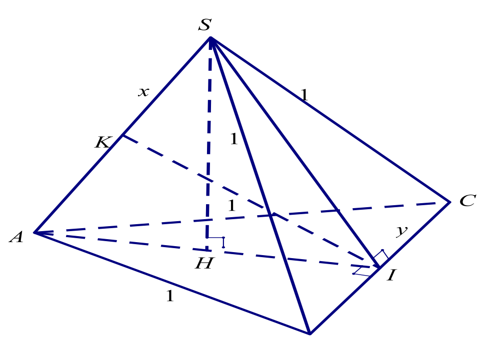
$= \left(\frac{1}{3}.S_{BB'C'C}.\mathrm{d}\left(A,\left(BB'C'C\right)\right)\right).\frac{1}{12} = \frac{1}{12}.\frac{2}{3}V = \frac{1}{18}V$, $V_{P.QRS} = \frac{PB'}{AB'}.V_{A.QRS} = \frac{2}{3}.\frac{1}{18}V = \frac{1}{27}V$

◆ $V_{MNRQPS} = V_{P.MNRQ} + V_{P.QRS} = \frac{1}{18}V + \frac{1}{27}V = \frac{5}{54}V$, Vậy: $\frac{V_{MNRQPS}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{5}{54}$.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y, AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất khi tổng $(x+y)$ bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Lời giải:



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SA, BC và H là hình chiếu của S lên (ABC).

Ta có: $BC \perp (SAI)$ và $H \in AI, \Delta SAI$ cân tại I.

$SI = AI = \sqrt{SC^2 - IC^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4-y^2}}{2}$, $IK = \sqrt{AI^2 - AK^2} = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2}$

$S_{SAI}=\frac{1}{2}SH.AI=\frac{1}{2}SA.IK\Rightarrow SH=\frac{SA.IK}{AI}=\frac{x.\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{4-y^2}}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.AI=\frac{y\sqrt{4-y^2}}{4}$

Theo bất đẳng thức trong tam giác ta có: $0<x,y<2$

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}.SH=\frac{1}{12}xy\sqrt{4-\left(x^2+y^2\right)}\le\frac{1}{12}xy\sqrt{4-2xy}$ (vì $x^2+y^2\ge 2xy$)

Suy ra $V_{S.ABC}\le\frac{1}{12}xy\sqrt{4-2xy}=\frac{1}{12}\sqrt{xy.xy.\left(4-2xy\right)}\le\frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{xy+xy+4-2xy}{3}\right)^3}=\frac{32\sqrt{3}}{3}$

$V_{S.ABC}$ lớn nhất $\Leftrightarrow V_{S.ABC}=\frac{32\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}x=y\\ xy=4-2xy\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow x+y=\frac{4}{\sqrt{3}}$.