SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐỒNG NAI
ĐỀ CHÍNH THỨC

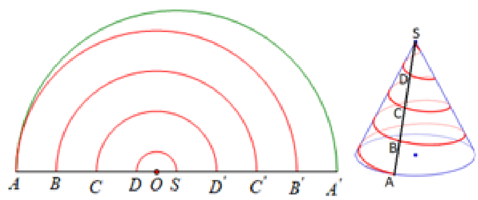
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2023-2024
Môn Toán
Thời gian làm bài 180 phút
Ngày thi: 19/01/2024 (đề thi gồm một trang có mười câu).

Câu 1. (2,5 điểm) Tìm tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 9$ và tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị đó.

Câu 2. (2,5 điểm) Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x - \cos x - 1 = 0$.

Câu 3. (2 điểm)

Cho một tấm bìa là nửa hình tròn tâm S đường kính AA'. Trên đoạn AA' lần lượt lấy các điểm B, C, D, D', C', B' thỏa mãn $AB = BC = CD = DS = SD' = D'C' = C'B' = B'A'$, gọi O là trung điểm của SD. Lần lượt vẽ các nửa đường tròn tâm O đường kính DS, CD', BC', AB'. Dán hai bán kính SA với SA' sao cho A trùng A', B trùng B', C trùng C', D trùng D' để tạo thành hình nón đỉnh S mà trên mặt xung quanh có đường xoắn ốc từ A đến S gồm các cung tròn đi qua A, B, C, D, S (như hình vẽ minh họa). Tính độ dài đường xoắn ốc, biết thể tích khối nón bằng $\dfrac{64\sqrt{3}.\pi}{3}\cdot$



Câu 4. (2 điểm) Cho hàm số $f(x) = \ln\left(\dfrac{2024x}{x+2}\right)\cdot$ Tìm đạo hàm $f'(x)$ của hàm số đã cho. Chứng minh $f'(1) + f'(2) + f'(3) + ... + f'(2024) < \dfrac{3}{2}\cdot$

Câu 5. (2,5 điểm) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC' bằng $9a^2$, biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B'$ và BC' bằng $2a$, với $a > 0$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Câu 6. (2 điểm) Hỏi có bao nhiêu cách sắp 6 quyển sách khác nhau vào 3 ngăn tủ khác nhau sao cho mỗi ngăn tủ có ít nhất một quyển sách? (Biết mỗi ngăn tủ có thể chứa được từ 1 đến 6 quyển sách và không kể thứ tự các quyển sách trong mỗi ngăn tủ).

Câu 7. (1 điểm) Chứng minh C_{2n}^n là số chẵn, với mọi số nguyên dương n.

Câu 8. (2 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 - 3(2x^2 - y^2 + 2y) + 15x - 10 = 0 \\ x^2 + \sqrt{x+y-1} = \sqrt{2-x} \end{cases}$ (với $x, y \in \mathbb{R}$).

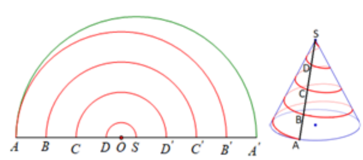
Câu 9. (2 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)$.

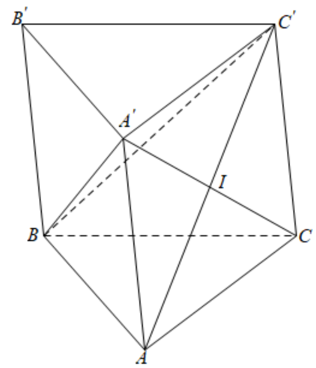
Câu 10. (1,5 điểm) Cho hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn $f(f(2a) + f(b)) = 2a + b$, với mọi số hữu tỷ a, b (ký hiệu tập hợp các số hữu tỷ là $\mathbb{Q}$). Chứng minh f là hàm số lẻ.

HẾT

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.
Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: .... Trường: ...

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1.		*Tìm tọa độ hai điểm cực trị và tính khoảng cách:*	2,50
		Ta có $y = x^3 - 3x^2 + 9$, gọi đồ thị là (C), tập xác định $D = \mathbb{R}$. $y' = 3x^2 - 6x$.	0,75
		$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.	0,25
		Mà $y'' = 6x - 6 \Rightarrow y''(0) = -6 < 0$ và $y''(2) = 6 > 0$.	0,50
		Vậy (C) có hai điểm cực trị là $(0\,;\,9), (2\,;\,5)$.	0,50
		Nên khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $\sqrt{(2-0)^2 + (5-9)^2} = 2\sqrt{5}$.	0,50
2.		*Tìm nghiệm dương nhỏ nhất:*	2,50
		Ta có $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = \sin x - \cos x$	0,50
		$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$	1,00
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$.	0,50
		Vậy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình đã cho là $x = \dfrac{\pi}{3}$.	0,50
3.		*Tính độ dài đường xoắn ốc:*	2,00
		 Đặt $SA = R \Rightarrow l = R$ là đường sinh và gọi r là bán kính đáy của hình nón. $\Rightarrow$ Chu vi đường tròn đáy của hình nón là $2\pi r = \dfrac{1}{2} \cdot 2\pi R \Leftrightarrow r = \dfrac{R}{2}$.	0,50
		$\Rightarrow$ Hình nón có chiều cao $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ nên có thể tích $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \dfrac{R^2}{4} \cdot \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{64\sqrt{3}.\pi}{3} \Leftrightarrow R = 8$.	1,00
		$\Rightarrow AB = BC = CD = DS = 2 \Rightarrow OD = 1, OC = 3, OB = 5, OA = 7$. Vậy độ dài đường xoắn ốc bằng tổng độ dài các nửa đường tròn tâm O đường kính DS, CD', BC', AB' bằng $\pi(OD + OC + OB + OA) = 16\pi$.	0,50
4.		*Tìm đạo hàm $f'(x)$ và chứng minh $f'(1) + f'(2) + f'(3) + ... + f'(2024) < \dfrac{3}{2}$:*	2,00
		$f(x) = \ln\left(\dfrac{2024x}{x+2}\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\frac{2024x}{x+2}}\left(\dfrac{2024x}{x+2}\right)' = \dfrac{2}{x(x+2)}$ $(x > 0 \vee x < -2)$.	1,00
		Vậy $f'(1) + f'(2) + f'(3) + ... + f'(2024)$ $= 2\left(\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + ... + \dfrac{1}{2023.2025}\right) + 2\left(\dfrac{1}{2.4} + \dfrac{1}{4.6} + ... + \dfrac{1}{2024.2026}\right)$ $= \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} + ... + \dfrac{1}{2023} - \dfrac{1}{2025}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6} + ... + \dfrac{1}{2024} - \dfrac{1}{2026}\right)$ $= 1 - \dfrac{1}{2025} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2026} < 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.	1,00

5.		*Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$:*	2,50
		 Ta có $A'B' \parallel AB \Rightarrow A'B' \parallel (ABC')$ $\Rightarrow d(A', (ABC')) = d(A'B', (ABC')) = d(A'B', BC') = 2a$.	0,75
		Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, hai khối tứ diện $A'ABC', C'ABC$. Gọi S, S_1 lần lượt là diện tích $\triangle ABC, \triangle ABC'$. Ta có $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot d(A', (ABC')).S_1 = \dfrac{1}{3} \cdot 2a.9a^2 = 6a^3$.	0,50
		Vì $AA'C'C$ là hình bình hành nên $A'C$ cắt AC' tại trung điểm I của $A'C$. $\Rightarrow d(C, (ABC')) = d(A', (ABC')) \Rightarrow V_2 = V_1 = 6a^3$.	0,50
		Mặt khác $V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot d(C', (ABC)).S = \dfrac{1}{3} \cdot V$ nên $V = 3V_2 = 18a^3$. Do đó thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $18a^3$.	0,75
6.		*Tính số cách sắp:*	2,00
		Để sắp 6 quyển sách khác nhau vào 3 ngăn tủ khác nhau gọi là A, B, C sao cho mỗi ngăn có ít nhất 1 quyển sách, xảy ra một trong ba trường hợp sau: TH1: Sắp 2 ngăn tủ mà mỗi ngăn có 1 quyển, ngăn còn lại có 4 quyển Chia ra 3 trường hợp gồm A và B có 1 quyển và C có 4 quyển và hai hoán vị tương tự. Nên có $C_6^1.C_5^1.3 = 90$ (cách).	0,75
		TH2: Sắp 1 ngăn tủ có 1 quyển, 1 ngăn có 2 quyển và ngăn còn lại có 3 quyển Tương tự có $(C_6^1.C_5^2.C_3^3 + C_6^1.C_5^3.C_2^2).3 = 360$ (cách).	0,75
		TH3: Sắp 3 ngăn mà mỗi ngăn có 2 quyển. Tương tự có $C_6^2.C_4^2.C_2^2 = 90$ (cách). Vậy có $90 + 360 + 90 = 540$ (cách sắp thỏa mãn bài toán).	0,50
7.		*Chứng minh C_{2n}^n là số chẵn, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:*	1,00
		Xét số nguyên dương n, ta có $C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{n!.n!} = \dfrac{2n.(2n-1)!}{n.(n-1)!.n!} = 2.C_{2n-1}^{n-1}$.	0,75
		Mà $C_{2n}^n, C_{2n-1}^{n-1} \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy C_{2n}^n là số chẵn, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,25
8.		*Giải hệ phương trình:*	2,00
		Ta có $\begin{cases} x^3 - y^3 - 3(2x^2 - y^2 + 2y) + 15x - 10 = 0 \ (1) \\ x^2 + \sqrt{x+y-1} = \sqrt{2-x} \ (2) \end{cases}$. $(1) \Leftrightarrow (x-2)^3 + 3(x-2) = (y-1)^3 + 3(y-1)$ (3).	0,75
		Hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.	0,25
		$(3) \Leftrightarrow f(x-2) = f(y-1) \Leftrightarrow x - 2 = y - 1 \Leftrightarrow y = x - 1$	0,25

		$(2) \Leftrightarrow x^2+\sqrt{2x-2}-\sqrt{2-x}=0$ (điều kiện $x \in D=[1\,;\,2]$) $\Leftrightarrow x^2-1+\sqrt{2x-2}+1-\sqrt{2-x}=0 \Leftrightarrow x^2-1+\sqrt{2x-2}+\dfrac{x-1}{1+\sqrt{2-x}}=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left[(x+1)\sqrt{x-1}+\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{2-x}}\right]=0$ $\Leftrightarrow x=1 \Leftrightarrow y=0$ (nhận), vì $(x+1)\sqrt{x-1}+\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{2-x}}>0, \forall x \in D.$ Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x\,;\,y)=(1\,;\,0)$.	0,75
9.		*Tìm min$P$:*	2,00
		Ta có $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)$. Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $\dfrac{a^3}{a^3+2}+\dfrac{1}{b^3+2}+\dfrac{1}{c^3+2} \geq \dfrac{3a}{\sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)}}$ (1). Tương tự $\dfrac{b^3}{b^3+2}+\dfrac{1}{c^3+2}+\dfrac{1}{a^3+2} \geq \dfrac{3b}{\sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)}}$ (2) và $\dfrac{c^3}{c^3+2}+\dfrac{1}{a^3+2}+\dfrac{1}{b^3+2} \geq \dfrac{3c}{\sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)}}$ (3). Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế ta có $3 \geq \dfrac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)}}$ Vậy $P=(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2) \geq 27, \forall a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$.	1,50
		Dấu = xảy ra khi $a=b=c=1$. Do đó min$P=27$.	0,50
10.		*Chứng minh f là hàm số lẻ:*	1,50
		Ta có hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa mãn $f(f(2a)+f(b))=2a+b, \forall a,b \in \mathbb{Q}$ (1). Thế $a=b=0$ vào (1) ta có $f(f(0)+f(0))=0 \Leftrightarrow f(2f(0))=0$. Đặt $c=2f(0) \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(c)=0$. Thế $a=\dfrac{c}{2} \in \mathbb{Q}$ và $b=c$ vào (1) ta có $f(f(c)+f(c))=2c \Leftrightarrow f(0)=2c$ $\Leftrightarrow f(0)=4f(0) \Leftrightarrow f(0)=0$.	0,75
		Thế $a=0$ và $b=a$ vào (1) ta có $f(f(a))=a, \forall a \in \mathbb{Q}$. Với $a,b \in \mathbb{Q}$ mà $f(a)=f(b) \Rightarrow f(f(a))=f(f(b)) \Leftrightarrow a=b$ (2). Với $a \in \mathbb{Q}$, thế a bởi $\dfrac{a}{2} \in \mathbb{Q}$ và $b=-a$ vào (1) ta có $f(f(a)+f(-a))=0$ $\Leftrightarrow f(f(a)+f(-a))=f(0) \Rightarrow f(a)+f(-a)=0$ (do (2)) $\Leftrightarrow f(-a)=-f(a), \ \forall a \in \mathbb{Q}$. Mặt khác lấy $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow -a \in \mathbb{Q}$. Vậy f là hàm số lẻ.	0,75

- Cách giải khác đúng được điểm tối đa.
- Điểm thành phần cho theo Biểu điểm này.