SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12
NĂM HỌC 2022 – 2023
MÔN TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 13/12/2022

Câu 1: *(1.5 điểm)*

Giải phương trình $4\sin^2\dfrac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Câu 2: *(1.5 điểm)*

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(\dfrac{1}{x^2}-2\sqrt{x}\right)^n$ với $x>0$ biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^0+C_n^1+C_n^2+....+C_n^n=1024$.

Câu 3: *(1.5 điểm)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3}\\(1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y}\end{cases}$

Câu 4: *(3.5 điểm)*

Giải các phương trình sau:

a) $2.27^x-9^{x^2+3x}=\left(\sqrt{3}\right)^{2x^2+9x}$;

b) $x^3-\sqrt[3]{x+2\ln x}-\dfrac{2}{3}\ln\left(x+2\ln x\right)=0$.

Câu 5: *(4.0 điểm)*

a) Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $\left(-2023;2023\right)$ để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

b) Cho hàm số $y=x^3-2\left(m+1\right)x^2+\left(3m+1\right)x+2m-2$ có đồ thị là $\left(C_m\right)$. Tìm tất cả các giá trị tham số m để $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $A\left(2;0\right)$, B và C sao cho trong hai điểm B, C có một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài đường tròn $\left(C\right):x^2+y^2=1$.

Câu 6: *(1.5 điểm)*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, biết AC vuông góc với mặt phẳng $\left(SBD\right)$ và $AB=SD=a, AD=SB=2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

Câu 7: *(2.0 điểm)*

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, tam giác SAC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết $AB=a$ và MN tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

Câu 8: *(1.5 điểm)*

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x)f(1-x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Câu 9: *(1.5 điểm)*

Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'C', BC$ và hai điểm F, E lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với AB', AC'. Tính thể tích của khối đa diện $MFENC'B'$.

Câu 10: *(1.5 điểm)*

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $xy \le y - 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \dfrac{x-2y}{6(x+y)}$.

----------- HẾT ----------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: *(1.5 điểm)*

Giải phương trình $4\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Ta có: $4\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow 2\left(1-\cos x\right)-\sqrt{3}\cos 2x=2+\cos\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\cos x\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-x+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{3}=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+k2\pi \end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Kết luận: Phương trình có họ nghiệm là $x=\frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3};x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$.

Câu 2: *(1.5 điểm)*

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(\frac{1}{x^2}-2\sqrt{x}\right)^n$ với $x>0$ biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^0+C_n^1+C_n^2+....+C_n^n=1024$.

Lời giải

Ta có: $(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+....+C_n^n\Leftrightarrow 2^n=1024\Leftrightarrow n=10$.

Với $n=10$ ta có $\left(\frac{1}{x^2}-2\sqrt{x}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k x^{2(k-10)}\left(-2\sqrt{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(-2)^k x^{2(k-10)+\frac{k}{2}}$.

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với k thỏa mãn: $2.(k-10)+\frac{k}{2}=0\Leftrightarrow k=8$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển ứng là: $C_{10}^8(-2)^8=11520$.

Câu 3: *(1.5 điểm)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3} \\ (1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện của hệ phương trình $\begin{cases} x-2y \ge 0 \\ 4x-5y-3 \ge 0 \\ x-y \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$.

Xét phương trình $(1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y}$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x-y} \\ b=\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=x-y \\ b^2=y \end{cases}$. Điều kiện $a \ge 0, b \ge 0$.

Ta được phương trình $(1-b^2)a+a^2+b^2=2+(a^2-1)b \Leftrightarrow (1-b)(a-1)(a+b+2)=0$

$\Leftrightarrow (1-b)(a-1)(a+b+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ a=1 \\ a+b+2=0 \end{array}\right.$.

Do $a \ge 0, b \ge 0$ nên $a+b+2=0$ vô nghiệm.

+ Với $b=1$ ta được $y=1$ thay vào phương trình $-3x+9=0 \Leftrightarrow x=3$.

+ Với $a=1$ ta được $x-y=1 \Rightarrow x=1+y$ thay vào phương trình

$2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3}$ ta được phương trinh

$2y^2-3(y+1)+6y+1=2\sqrt{1-y}-\sqrt{1-y} \Leftrightarrow 2y^2+3y-2=\sqrt{1-y}$.

Đặt $t=\sqrt{1-y}$ $(0 \le t \le 1)$ ta được phương trình

$2t^4-7t^2-t+3=0 \Leftrightarrow (2t^2-2t-3)(t^2+t-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t^2-2t-3=0 \\ t^2+t-1=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1-\sqrt{7}}{2} \approx -0.822(loai) \\ t=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2} \approx 1.822(loai) \\ t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.61(loai) \\ t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.61 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hay $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{1-y} \Leftrightarrow y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là $(x;y)=(3;1), (x;y)=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2};\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

Trong ΔSAB vuông tại A, ta có $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V=\dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.3\sqrt{3}.3.6=18\sqrt{3}$ (đvtt).

Câu 4: *(3.5 điểm)*

Giải các phương trình sau:

a) $2.27^x-9^{x^2+3x}=\left(\sqrt{3}\right)^{2x^2+9x}$;

b) $x^3-\sqrt[3]{x+2\ln x}-\dfrac{2}{3}\ln(x+2\ln x)=0$.

Lời giải

a) $2.27^x - 9^{x^2+3x} = \left(\sqrt{3}\right)^{2x^2+9x} \Leftrightarrow 2.3^{3x} - 3^{2x^2+6x} = 3^{x^2+\frac{9}{2}x}$

$$\Leftrightarrow 3^{2x^2+3x} + 3^{x^2+\frac{3}{2}x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2+\frac{3}{2}x} = 1 \\ 3^{x^2+\frac{3}{2}x} = -2\,(loai) \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{0; -\frac{3}{2}\right\}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x + \ln x > 0 \end{cases}$.

$$x^3 - \sqrt[3]{x + 2\ln x} - \frac{2}{3}\ln\left(x + 2\ln x\right) = 0 \Leftrightarrow x^3 = \sqrt[3]{x + 2\ln x} + 2\ln\left(\sqrt[3]{x + 2\ln x}\right)$$

Đặt $t = \sqrt[3]{x + 2\ln x}$ $(t > 0)$, kết hợp phương trình ta có hệ:

$$\begin{cases} t = \sqrt[3]{x + 2\ln x} \\ x^3 = t + 2\ln t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 = x + 2\ln x & (1) \\ x^3 = t + 2\ln t & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow t^3 - x^3 = x + 2\ln x - t - 2\ln t \Rightarrow t^3 + t + 2\ln t = x^3 + x + 2\ln x \qquad (3)$$

Xét hàm đặc trưng $f(u) = u^3 + u + 2\ln u$, $(u > 0)$

Ta có $f'(u) = 3u^2 + 1 + \frac{2}{u} > 0$, $\forall u > 0 \Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $(u; +\infty)$

$(3) \Leftrightarrow f(t) = f(x) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow x^3 = x + 2\ln x \Leftrightarrow x^3 - x - 2\ln x = 0$.

Xét $g(x) = x^3 - x - 2\ln x$ $(x > 0)$.

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{(x-1)\left(3x^2 + 3x + 2\right)}{x}$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của $g(x) = 0$

Thử lại, ta nhận nghiệm $x = 1$.

Câu 5: *(4.0 điểm)*

a) Cho hàm số $y = \dfrac{mx + 4}{x + m}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2023; 2023)$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

b) Cho hàm số $y = x^3 - 2(m+1)x^2 + (3m+1)x + 2m - 2$ có đồ thị là (C_m). Tìm tất cả các giá trị tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $A(2;0)$, B và C sao cho trong hai điểm B, C có một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

YCBT $\Leftrightarrow y' = \dfrac{m^2-4}{(x+m)^2} > 0,\ \forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4>0 \\ -m \notin (1;+\infty) \end{cases} \Rightarrow m > 2$.

Vì $m \in (-2023;2023)$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên ta có $m = \{3;4;5;.......;2021;2022\}$.

Vậy có 2020 giá trị nguyên của tham số m.

b) Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 2(m+1)x^2 + (3m+1)x + 2m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - 2mx - m + 1 = 0 \end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2 - 2mx - m + 1 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $\left[\begin{array}{l} -1 < x_1 < 1 < x_2 \\ x_1 < -1 < x_2 < 1 \end{array}\right.$

+ Điều kiện để phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $\Delta' = m^2 + m - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ (2)

+ Xét phương trình (1)

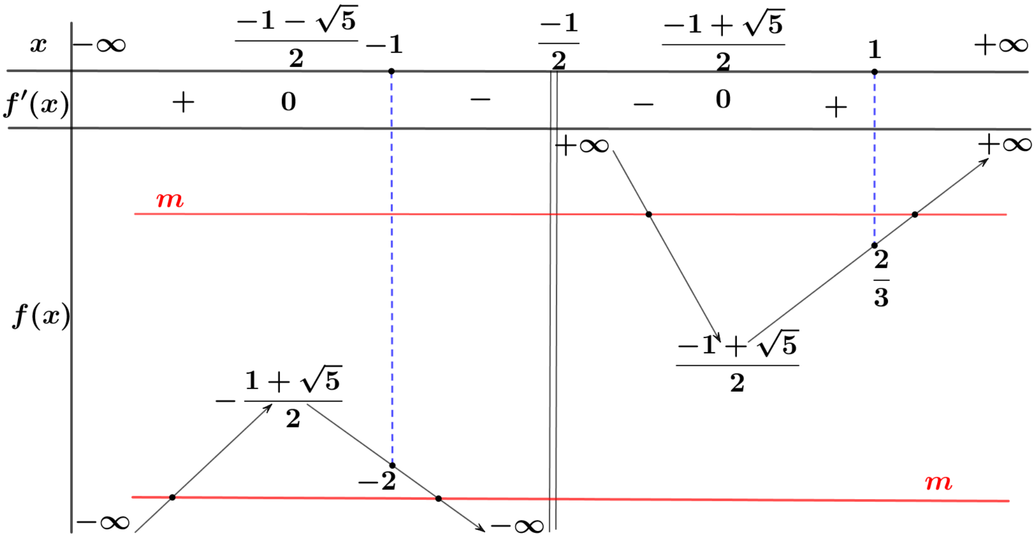
- Nếu $x = -\dfrac{1}{2}$ thì (1) có dạng: $\dfrac{1}{4} + m - m + 1 = 0$ (vô lý). Suy ra $x = -\dfrac{1}{2}$ không là nghiệm.

- Khi $x \neq -\dfrac{1}{2}$ thì $(1) \Leftrightarrow m = \dfrac{x^2+1}{2x+1}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x+1}$.

$f'(x) = \dfrac{2x^2+2x-2}{(2x+1)^2}$, cho $f'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên



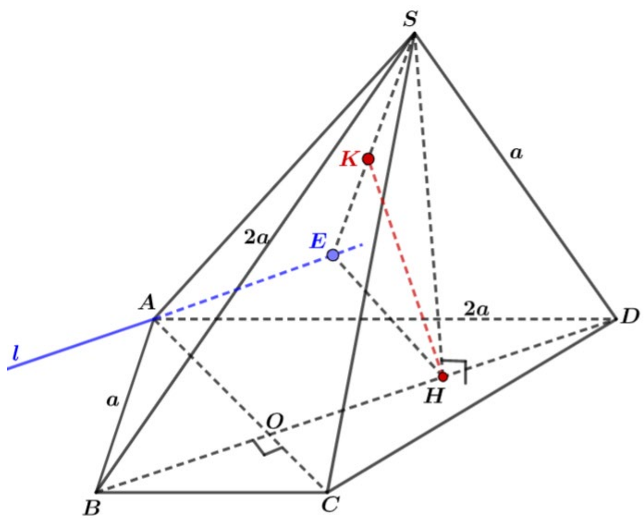
Từ BBT, ta nhận xét $\left[\begin{array}{l}-1<x_1<1<x_2\\x_1<-1<x_2<1\end{array}\right.$ thì $\left[\begin{array}{l}m<-2\\m>\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$ thỏa mãn điều kiện (2).

Vậy $m\in(-\infty;-2)\cup\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. *(1.5 điểm)*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, biết AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) và $AB=SD=a, AD=SB=2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

Lời giải



◆ Theo đề $\begin{cases}AC\perp(SBD)\\AC\subset(ABCD)\end{cases}\Rightarrow(ABCD)\perp(SBD)$.

Trong mặt phẳng (SBD) gọi H là hình chiếu của S lên BD (1).

Vì $\begin{cases}(ABCD)\perp(SBD)\\(ABCD)\cap(SBD)=SD\end{cases}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SH\perp(ABCD)$.

◆ Trong mặt phẳng $(ABCD)$ ta có: $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=a\sqrt{5}$.

Từ đó suy ra tam giác SBD vuông tại S.

Khi đó $SH.BD=SB.SD\Rightarrow SH=\dfrac{SB.SD}{BD}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Mặt khác $\Delta SBD=\Delta ADB\Rightarrow AO=SH=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$, với $O=AC\cap BD$.

◆ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi l là đường thẳng qua A và song song với BD.

Ta có $BD//(S,l)\Rightarrow d(BD,AC)=d(BD,(S,l))=d(H,(S,l))$.

Gọi E là hình chiếu của H lên đường thẳng l, vì tứ giác $AEHO$ là hình chữ nhật nên $AO=HE=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

K là hình chiếu của H lên SE. Khi đó $d(H,(S,l))=HK$.

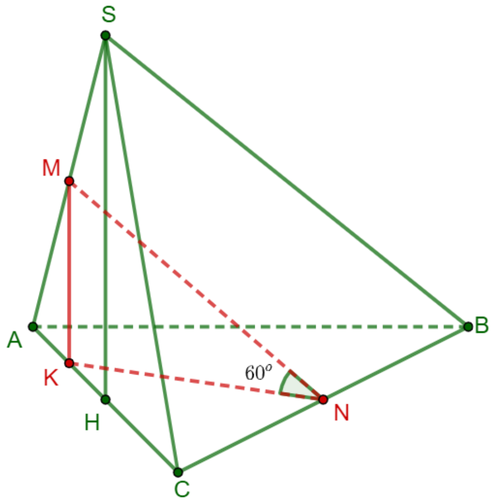
◆ Xét tam giác SHE vuông cân tại H (K là trung điểm của HE): $HK=\frac{SE}{2}=\frac{\sqrt{2}SH}{2}=\frac{\sqrt{10}a}{5}$.

Vậy $d\left(BD,AC\right)=\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 7. *(2.0 điểm)*

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, tam giác SAC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết $AB=a$ và MN tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

Lời giải



Gọi H,K lần lượt là trung điểm của AC và AH khi đó: $SH\perp\left(ABC\right)$ và $MK//SH$ nên $MK\perp\left(ABC\right)$.

$\Rightarrow\left(\widehat{MN,\left(ABC\right)}\right)=\widehat{MNK}=60°$.

Do tam giác ABC vuông cân tại B và $AB=a$ nên $BC=a, AC=a\sqrt{2}\Rightarrow CN=\frac{a}{2}, CK=\frac{3\sqrt{2}}{4}a$.

Áp dụng định lí cô – sin vào tam giác CKN ta có:

$KN^2=CN^2+CK^2-2.CN.CK.\cos 45°=\frac{5}{8}a^2\Rightarrow KN=\frac{a\sqrt{10}}{4}$

$\Rightarrow MK=KN.\tan 60°=\frac{a\sqrt{30}}{4}\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{30}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{a^3\sqrt{30}}{12}$.

Câu 8. *(1.5 điểm)*

Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f\left(\cot x\right)=\sin 2x+\cos 2x$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)f\left(1-x\right)$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

Lời giải

Ta có: $f\left(\cot x\right)=\sin 2x+\cos 2x=\dfrac{2\cot x}{\cot^2 x+1}+\dfrac{\cot^2 x-1}{\cot^2 x+1}=\dfrac{\cot^2 x+2\cot x-1}{\cot^2 x+1}$, $\forall x\in\left(0;\pi\right)$.

Đặt $t=\cot x$, điều kiện cho t là $t\in\mathbb{R}$, tương ứng với điều kiện $x\in\left(0;\pi\right)$.

$f\left(t\right)=\dfrac{t^2+2t-1}{t^2+1}$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $g\left(x\right)=f\left(x\right).f\left(1-x\right)=\dfrac{x^2\left(1-x\right)^2+8x\left(1-x\right)-2}{x^2\left(1-x\right)^2-2x\left(1-x\right)+2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $u=x\left(1-x\right)$.

$u'=1-2x$

$u'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Ta có bảng biến thiên

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
u'		$+$	0	$-$	
u	-2	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Do đó $u\in\left[-2;\dfrac{1}{4}\right]$.

Khảo sát hàm $h\left(u\right)=\dfrac{u^2+8u-2}{u^2-2u+2}$ trên $\left[-2;\dfrac{1}{4}\right]$.

$h'\left(u\right)=\dfrac{2\left(-5u^2+4u+6\right)}{\left(u^2-2u+2\right)^2}$.

$h'\left(u\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{2\left(-5u^2+4u+6\right)}{\left(u^2-2u+2\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\dfrac{2-\sqrt{34}}{2}\\ u=\dfrac{2+\sqrt{34}}{2}\quad(l)\end{array}\right.$.

u	-2		$\frac{2-\sqrt{34}}{5}$		$\frac{1}{4}$
$h'(u)$		$-$	0	$+$	
$h(u)$	$-\frac{7}{5}$	$\searrow$	$4-\sqrt{34}$	$\nearrow$	$\frac{1}{25}$

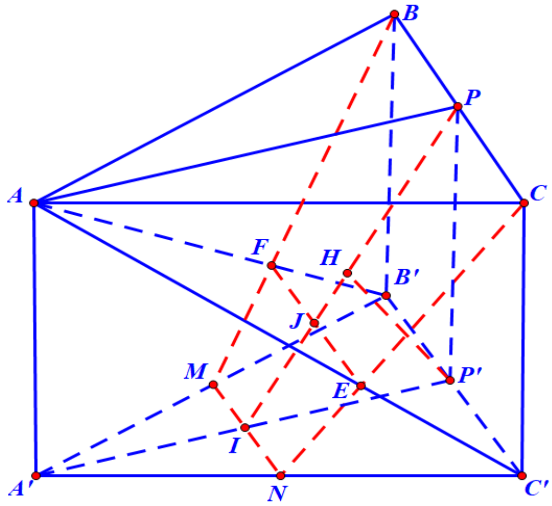
Vậy $\max\limits_{\left[-2;\frac{1}{4}\right]}h\left(u\right)=\dfrac{1}{25}$ khi $u=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\max\limits_{[-1;1]}g\left(x\right)=\dfrac{1}{25}$ khi $x=\dfrac{1}{2}$.

$\min\limits_{\left[-2;\frac{1}{4}\right]} h(u) = 4-\sqrt{34}$ khi $u = \dfrac{2-\sqrt{34}}{5} \Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} g(x) = 4-\sqrt{34}$ khi $x = \dfrac{1-\sqrt{2\sqrt{34}-3}}{2}$.

Câu 9. *(1.5 điểm)*

Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'C', BC$ và hai điểm F, E lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với AB', AC'. Tính thể tích của khối đa diện $MFENC'B'$.

Lời giải



Ta có $(MNP) \equiv (MBCN)$.

Thể tích khối $ABC.A'B'C' = \dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2.\sqrt{3}}{4}.2 = 6\sqrt{3}$.

Gọi P' là trung điểm của $B'C'$, $I = MN \cap A'P'$, $J = PI \cap EF$.

Vì $PP' \perp MN, A'P' \perp MN \Rightarrow (APP'A') \perp (MBCN)$ và $(APP'A') \cap (MBCN) = IP$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của P' trên $IP \Rightarrow P'H = d\left(P', (FBCE)\right)$.

Trong tam giác vuông IPP' có $PP' = 2, IP' = \dfrac{1}{2}A'P' = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow IP = \dfrac{5}{2} \Rightarrow P'H = \dfrac{6}{5}$.

Ta có E, F là trọng tâm của hai tam giác $CA'C'$ và $BA'B'$ nên suy ra $\dfrac{NE}{NC} = \dfrac{MF}{MB} = \dfrac{1}{3}$.

Vì $BM = CN \Rightarrow MFEN$ là hình thang cân có $EF // = \dfrac{2}{3}B'C' = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}, MN = \dfrac{1}{2}B'C' = \sqrt{3}$, chiều cao $IJ = \dfrac{1}{3}IP = \dfrac{5}{6} \Rightarrow S_{MFEN} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right).\dfrac{5}{6} = \dfrac{35\sqrt{3}}{36} \Rightarrow V_{P'.MFEN} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{35\sqrt{3}}{36}.\dfrac{6}{5} = \dfrac{7\sqrt{3}}{18}$.

Ta có $V_{E.NC'P'} = V_{F.MB'P'} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{3}V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{6\sqrt{3}}{36} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

(vì $S_{NP'C'} = \dfrac{1}{4}S_{A'B'C'}, d\left(E, (A'B'C')\right) = \dfrac{1}{3}d\left(A, (A'B'C')\right)$)

Vậy ta có thể tích khối $MFENC'B' = 2V_{E.NC'P'} + V_{P'.MFEN} = 2.\dfrac{\sqrt{3}}{6} + \dfrac{7\sqrt{3}}{18} = \dfrac{13\sqrt{3}}{18}$.

Câu 10. *(1.5 điểm)*

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $xy \le y-1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\dfrac{x-2y}{6(x+y)}$

Lời giải

Ta có $x>0, y>0$ nên

$$xy \le y-1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} \le \frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}=-\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \le \frac{1}{4}$$

$$P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\frac{x-2y}{6(x+y)}=\frac{\frac{x}{y}+1}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+3}}-\frac{\frac{x}{y}-2}{6\left(\frac{x}{y}+1\right)}$$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, điều kiện $0<t\le\dfrac{1}{4}$ ta có $P=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\dfrac{t-2}{6(t+1)}$

Xét $f(t)=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\dfrac{t-2}{6(t+1)}$ với $0<t\le\dfrac{1}{4}$

$$f'(t)=\frac{-3t+7}{2\sqrt{\left(t^2-t+3\right)^3}}-\frac{1}{2(t+1)^2}$$

$\forall t\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$ ta có : $t^2-t+3=t(t-1)+3<3; -3t+7>6$ và $t+1>1$

$\forall t\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right]: \dfrac{-3t+7}{2\sqrt{\left(t^2-t+3\right)^3}}>\dfrac{-3t+7}{6\sqrt{3}}>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $-\dfrac{1}{2(t+1)^2}>-\dfrac{1}{2}\Rightarrow f'(t)>0,\ \forall t\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$

Ta có bảng biến thiên như sau

t	0		$\frac{1}{4}$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{7+10\sqrt{5}}{30}$

$\Rightarrow f(t)\le f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7+10\sqrt{5}}{30}$. Vậy $P_{\max}=\dfrac{7+10\sqrt{5}}{30}$ khi $x=\dfrac{1}{2},\ y=2$

----------- HẾT ----------