UBND TỈNH KON TUM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12
NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: **26/01/2024**
(Đề thi có 01 trang, gồm 07 câu)

Câu 1 (3,5 điểm):

1. Chứng tỏ rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2m$ luôn có hai điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị đó không phụ thuộc vào tham số m.

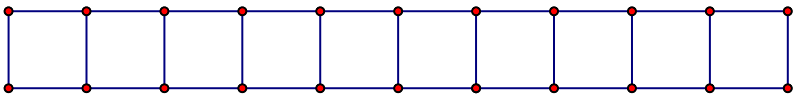
2. Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_{2024} a = 4; \log_{\sqrt{a}} b = 3; \log_{c^2} \sqrt{b} = 2$. Tính giá trị của biểu thức $Q = \log_{2024}\left(\sqrt{ab^2c^4}\right)$.

Câu 2 (4,0 điểm):

1. Giải phương trình $(\cos x + \sin x)(1 - \sin 2x) = \cos 2x$.

2. Cho hàm số $f(x) = x^2 - mx$. Xác định giá trị của m để hàm số $y = f\left(x^2 - mx\right)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0 = 1$.

Câu 3 (2,0 điểm): Điền ngẫu nhiên 10 số tự nhiên đầu tiên 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vào 10 ô vuông trong bảng ở hình vẽ bên dưới (mỗi ô vuông điền đúng một số).



Tính xác suất để ba ô vuông liền kề nhau bất kì có tổng ba số ghi trong ba ô vuông đó chia hết cho 3.

Câu 4 (2,0 điểm): Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác vuông cân ở B với $AC = 2a$. Giả sử mặt phẳng (ABC') và mặt phẳng $(A'B'C)$ vuông góc nhau. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Câu 5 (4,0 điểm): Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^o$. Biết $SA = SB = SC$, góc hợp bởi đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là 45^o.

1. Gọi N là điểm trên cạnh SD. Tìm vị trí của điểm N để đường thẳng AN hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45^o.

2. Gọi M là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác ΔSCD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AG, CM theo a.

Câu 6 (3,0 điểm):

1. Cho dãy số (u_n) được xác định $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} + n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng $S = \dfrac{1}{u_1.u_2} + \dfrac{1}{u_2.u_3} + \ldots + \dfrac{1}{u_{2023}.u_{2024}}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (y+2)\left(\sqrt{2x+1} - 1\right) = 2x \\ \sqrt{x^3 - x + 3} = x + y \end{cases}$.

Câu 7 (1,5 điểm): Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1$ và $x + y + z = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xyz$.

-- HẾT --

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị không được giải thích gì thêm.

UBND TỈNH KON TUM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HƯỚNG DẪN CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12
NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn: Toán
(Hướng dẫn gồm 07 trang)

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

1) Hướng dẫn chấm thi này chỉ trình bày các bước chính của lời giải hoặc nêu kết quả. Trong bài làm, thí sinh phải trình bày lập luận đầy đủ.

2) Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm thi mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

3) Việc chi tiết hoá thang điểm (nếu có) so với thang điểm trong hướng dẫn phải đảm bảo không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong tổ chấm thi. Các điểm thành phần và điểm cộng toàn bài giữ nguyên không làm tròn.

II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu 1.1 (2,0 điểm): Chứng tỏ rằng đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2m$ luôn có hai điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị đó không phụ thuộc vào tham số m.

Đáp án và biểu điểm

Nội dung	Điểm
Tập xác định $D=\mathbb{R}$.	0,25
$y'=3x^2-6x$.	0,25
$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.	0,25
Suy ra đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị là $A(0;2m)$, $B(2;2m-4)$.	0,5
Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-4)$.	0,25
Vậy $AB=2\sqrt{5}$ không phụ thuộc vào m.	0,5

Câu 1.2 (1,5 điểm): Cho a,b,c là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_{2024}a=4;\ \log_{\sqrt{a}}b=3;\ \log_{c^2}\sqrt{b}=2$. Tính giá trị của biểu thức $Q=\log_{2024}\left(\sqrt{ab^2c^4}\right)$.

Đáp án và biểu điểm

Nội dung	Điểm
Ta có: + $\log_{2024}a=4\Leftrightarrow a=2024^4$.	0,25
+ $\log_{\sqrt{a}}b=3\Leftrightarrow b=\sqrt{a^3}=2024^6\Leftrightarrow b^2=2024^{12}$.	0,25
+ $\log_{c^2}\sqrt{b}=2\Leftrightarrow c^4=\sqrt{b}\Leftrightarrow c^4=2024^3$.	0,25
Suy ra $Q=\log_{2024}\left(\sqrt{ab^2c^4}\right)=\frac{1}{2}\log_{2024}\left(ab^2c^4\right)$.	0,25
$=\frac{1}{2}\log_{2024}\left(2024^4.2024^{12}.2024^3\right)$	0,25
$=\frac{1}{2}\log_{2024}2024^{19}=\frac{19}{2}$.	0,25

Câu 2.1 (2,0 điểm): Giải phương trình $(\cos x+\sin x)(1-\sin 2x)=\cos 2x$ (1).

Đáp án và biểu điểm

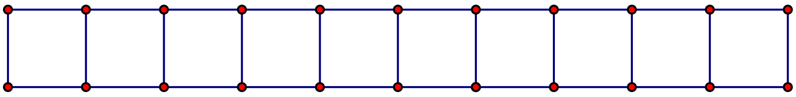
Nội dung	Điểm
Phương trình $(1)\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)^2=\cos 2x$.	0,25
$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos x-\sin x)=\cos 2x$.	0,25
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos x-\sin x=1\end{array}\right.$.	0,25
* $\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.	0,25
$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.	0,25
* $\cos x-\sin x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$.	0,25
$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{-\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.	0,25
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}; x=k2\pi; x=\frac{-\pi}{2}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$.	0,25

Câu 2.2 (2,0 điểm): Cho hàm số $f(x)=x^2-mx$. Xác định giá trị của m để hàm số $y=f(x^2-mx)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0=1$.

Đáp án và biểu điểm

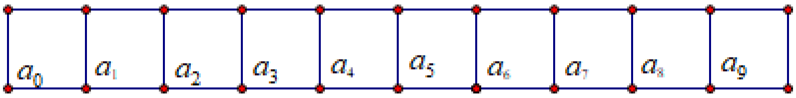
Nội dung	Điểm
Hàm số $f(x)=x^2-mx$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=2x-m$.	0,25
$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{m}{2}$.	0,25
Hàm số $y=f(x^2-mx)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có $y'=(2x-m).f'(x^2-mx)$.	0,25
Vì hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x_0=1$ suy ra $y'(1)=0\Leftrightarrow(2-m).f'(1-m)=0$.	0,25
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2\\ m=\frac{2}{3}\end{array}\right.$.	0,25
Lại có $y''=2.f'(x^2-mx)+(2x-m)^2.f''(x^2-mx)$.	0,25
* Với $m=2$, ta có $y''(1)=2.f'(-1)=-8<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x_0=1$. Do đó, $m=2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25
* Với $m=\frac{2}{3}$, ta có $y''(1)=2.f'\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{16}{9}.f''\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{9}>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x_0=1$. Vậy $m=\frac{2}{3}$ là giá trị cần tìm.	0,25

Câu 3 (2,0 điểm): Điền ngẫu nhiên 10 số tự nhiên đầu tiên 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vào 10 ô vuông trong bảng ở hình vẽ bên dưới (mỗi ô vuông điền đúng một số).



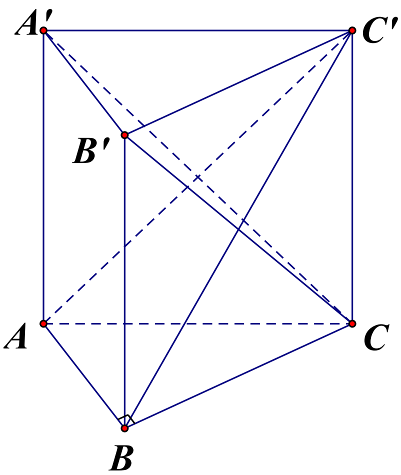
Tính xác suất để ba ô vuông liền kề nhau bất kì có tổng ba số ghi trong ba ô vuông đó chia hết cho 3.

Đáp án và biểu điểm

Nội dung	Điểm
Xét phép thử điền ngẫu nhiên 10 số tự nhiên đầu tiên vào 10 vị trí trong bảng ở hình vẽ bên dưới. Khi đó $n(\Omega)=10!$.	0,5
Xét A là biến cố "tổng của ba số được ghi trong ba ô vuông liền nhau bất kỳ luôn chia hết cho 3". Ta tính $n(A)$ như sau: Xét ba tập hợp $A_0=\{0;3;6;9\}; A_1=\{1;4;7\}; A_2=\{2;5;8\}$.	0,25
Gọi các số được điền vào các ô vuông theo thứ tự từ trái qua phải lần lượt là $a_0;a_1;...;a_9$ như hình ảnh bên dưới  Vì tổng của ba số ghi trong ba ô vuông liền kề nhau bất kỳ luôn chia hết cho 3 nên $a_0+a_1+a_2$ chia hết cho 3 và các bộ số + a_0,a_3,a_6,a_9 có cùng số dư khi chia cho 3. + a_1,a_4,a_7 có cùng số dư khi chia cho 3. + a_2,a_5,a_8 có cùng số dư khi chia cho 3.	0,25
Suy ra $A_0=\{a_0;a_3;a_6;a_9\}$ và $A_1=\{a_1;a_4;a_7\}$ hoặc $A_1=\{a_2;a_5;a_8\}$.	0,25
Khi đó ta có $n(A)=4!.(3!.3!+3!.3!)=2.4!.3!.3!$.	0,25
Xác suất $p(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{2.4!.3!.3!}{10!}=\dfrac{1}{2100}$.	0,5

Câu 4 (2,0 điểm): Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác vuông cân ở B với $AC=2a$. Giả sử mặt phẳng (ABC') và mặt phẳng $(A'B'C)$ vuông góc nhau. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Đáp án và biểu điểm



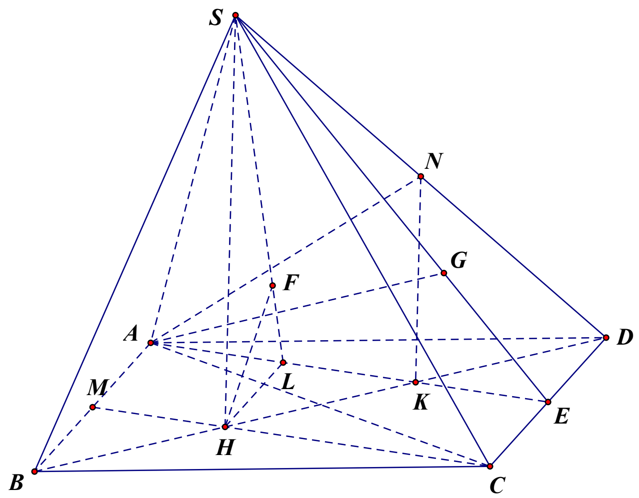
Nội dung	Điểm
Vì tam giác ΔABC vuông cân ở B suy ra $AB = BC = \dfrac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.	0,25
Diện tích tam giác ΔABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = a^2$.	0.25
Ta có $AB \perp BC$ và $AB \perp BB'$ (vì $BB' \perp (ABC)$) nên $AB \perp (BCC'B')$ suy ra $(ABC') \perp (BCC'B')$.	0,25
Lại có $(ABC') \perp (A'B'C)$ suy ra $(ABC') \perp B'C$.	0,25
Suy ra $B'C \perp BC'$.	0,25
Vì $BCC'B'$ là hình chữ nhật có $B'C \perp BC'$ nên $BCC'B'$ hình vuông. Suy ra $CC' = a\sqrt{2}$.	0,25
Thể tích khối lăng trụ bằng $V = a^2.a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$.	0,5

Câu 5 (4,0 điểm): Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^o$. Biết $SA = SB = SC$, góc hợp bởi đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là 45^o.

1. Gọi N là điểm trên cạnh SD. Tìm vị trí của điểm N để đường thẳng AN hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45^o.

2. Gọi M là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác ΔSCD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AG, CM theo a.

Đáp án và biểu điểm



Câu 5.1 (2,0 điểm):

Nội dung	Điểm
Gọi H là trọng tâm tam giác ΔABC. Tam giác ABC đều (vì $AB = BC; \widehat{ABC} = 60^o$) và $SA = SB = SC$ suy ra $SH \perp (ABCD)$.	0,25
Góc giữa SD và $(ABCD)$ là $\widehat{SDH} = 45°$.	0,25
Kẻ $NK // SH$, (K nằm trên đoạn BH vì N nằm trên cạnh SD) suy ra $NK \perp (ABCD)$ Suy ra góc giữa AN và $(ABCD)$ là $\widehat{NAK} = 45^o$.	0,25
Tam giác ΔAKN vuông cân tại K (vì $NK \perp AK, \widehat{NAK} = 45^o$) nên $AK = NK$.	0,25

Tam giác ΔNKD vuông cân tại K (vì $NK \perp KD, \widehat{NDK} = 45^o$) nên $DK = KN$. Suy ra $KD = KA$.	0,25
Mà $K \in BD$ suy ra K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔACD.	0,25
Suy ra $DK = \frac{1}{3}BD = BH$. Do đó K là trung điểm DH.	0,25
Suy ra N là trung điểm SD.	0,25

Câu 5.2 (2,0 điểm):

Nội dung	Điểm
Gọi E là trung điểm CD, ta có $AE // CM$ và $AE \perp CD$.	0,25
Gọi L là điểm trên AE sao cho $HL \perp AE \Rightarrow HL // CE$ và $HL = CE = \frac{a}{2}$.	0,25
Vì $AE // CM$ nên $d\left(CM, AG\right) = d(CM,(SAE)) = d(H,(SAE))$.	0,25
Gọi F là hình chiếu vuông góc của H lên SL. Ta có $\begin{cases} HL \perp AE \\ SH \perp AE \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SHL) \Rightarrow AE \perp HF$.	0,25
Mà $HF \perp SL$ nên $HF \perp (SAE)$ suy ra $d(H,(SAE)) = HF$.	0,25
Tam giác SHL vuông tại H có HF là đường cao nên $\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HL^2}$	0,25
$= \frac{3}{4a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{19}{4a^2}$.	0,25
Suy ra $HF = \frac{2a\sqrt{19}}{19}$. Vậy $d\left(CM, AG\right) = \frac{2a\sqrt{19}}{19}$.	0,25

Câu 6.1 (1,0 điểm): Cho dãy số $\left(u_n\right)$ được xác định $u_1 = 1$ và

$u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n} + n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng $S = \frac{1}{u_1.u_2} + \frac{1}{u_2.u_3} + ... + \frac{1}{u_{2023}.u_{2024}}$.

Đáp án và biểu điểm

Nội dung	Điểm
Ta có $u_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}}{n-1} + n, \forall n \geq 2$ $\Leftrightarrow u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} = \left(n-1\right).u_n - n\left(n-1\right), \forall n \geq 2$.	0,25
Khi đó $u_{n+1} = u_n - \left(n-1\right) + \left(n+1\right) = u_n + 2, \forall n \geq 2$, mà $u_2 = 3$ nên $u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1$. Suy ra $\left(u_n\right)$ là cấp số cộng với $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$. Suy ra $u_n = 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,25
$S = \frac{1}{u_1.u_2} + \frac{1}{u_2.u_3} + ... + \frac{1}{u_{2023}.u_{2024}} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_2 - u_1}{u_1.u_2} + \frac{u_3 - u_2}{u_2.u_3} + ... + \frac{u_{2024} - u_{2023}}{u_{2023}.u_{2024}}\right)$	0,25
$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + ... + \frac{1}{u_{2023}} - \frac{1}{u_{2024}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{2024}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4047}\right) = \frac{2023}{4047}$.	0,25

Câu 6.2 (2,0 điểm): Giải hệ phương trình $\begin{cases} (y+2)\left(\sqrt{2x+1}-1\right)=2x & (1) \\ \sqrt{x^3-x+3}=x+y & (2) \end{cases}$.

Đáp án và biểu điểm

Nội dung	Điểm
Điều kiện: $\begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ x^3-x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ x^3-x+3\ge 0 \end{cases}$.	0,25
Phương trình (1) ta có $(y+2)\left(\sqrt{2x+1}-1\right)=2x \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(y+1-\sqrt{2x+1}\right)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+1}-1=0 \\ y=\sqrt{2x+1}-1 \end{array}\right.$.	0,25
Với $\sqrt{2x+1}-1=0 \Leftrightarrow x=0$, thay vào phương trình (2) ta được $y=\sqrt{3}$. Thỏa mãn hệ phương trình.	0,25
Với $y=\sqrt{2x+1}-1$ thay vào phương trình (2) ta được $\sqrt{x^3-x+3}-\sqrt{2x+1}=x-1$ (*) Xét $x=1$ là một nghiệm của phương trình (*), suy ra $y=\sqrt{3}-1$. Thỏa mãn hệ phương trình.	0,25
Xét $x\ne 1$, ta có $\sqrt{x^3-x+3}+\sqrt{2x+1}=\dfrac{x^3-3x+2}{\sqrt{x^3-x+3}-\sqrt{2x+1}}=x^2+x-2$.	0,25
Kết hợp với (*) suy ra $2\sqrt{2x+1}=x^2-1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=x$ (vì $x+1>0$)	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1+\sqrt{2}$. Khi đó $y=\sqrt{2}$. Thỏa mãn hệ phương trình.	0,25
Vậy hệ phương trình có ba nghiệm $(x;y)$ là $\left(0;\sqrt{3}\right);\left(1;\sqrt{3}-1\right);\left(1+\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.	0,25

Câu 7. (1,5 điểm): Cho ba số thực x,y,z thỏa mãn $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 1$, $x+y+z=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xyz$.

Đáp án và biểu điểm

Nội dung	Điểm
Ta có: $P=xyz\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2.z=\left(\dfrac{2-z}{2}\right)^2.z=\dfrac{1}{4}\left(4z-4z^2+z^3\right)$.	0,25
Xét hàm số $f(z)=4z-4z^2+z^3$ trên $[1;2]$.	0,25
Ta có: $f'(z)=4-8z+3z^2; f'(z)=0 \Leftrightarrow z=2$ (vì $z\in[1;2]$)	0,25
Bảng biến thiên của hàm số $f(z)$: $\begin{array}{c\|ccc} z & 1 & & 2 \\ \hline f'(z) & & - & \\ \hline f(z) & 1 & \searrow & 0 \end{array}$	0,25

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $P = \frac{1}{4} f(z) \le \frac{1}{4} f(1) = \frac{1}{4}$, $\forall z \in [1;2]$.	0,25
Vậy $P_{\max} = \frac{1}{4}$ khi $\begin{cases} z = 1 \\ x = y = \frac{1}{2} \end{cases}$.	0,25

..................................HẾT................................

UBND TỈNH KON TUM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI DỰ BỊ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12
NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: **26/1/2024**
(Đề thi có 01 trang, gồm 07 câu)

Câu 1 (3,5 điểm):

1. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d_m): y=x+m$. Tìm m để (C) cắt (d_m) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=3\sqrt{2}$.

2. Cho hai số thực dương a, b khác 1 thỏa mãn $\log_a 2=3$, $\log_b \sqrt{a}=\dfrac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_4(ab)$.

Câu 2 (4,0 điểm):

1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2-2x)$.

2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2\cos 2x+2m.\sin x=3m+2$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Câu 3 (2,0 điểm): Cho đa giác đều có $2n$ $(n\in\mathbb{Z}, n\geq 2)$ cạnh nội tiếp đường tròn tâm O. Biết số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ đỉnh của đa giác nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ đỉnh của đa giác. Tính số đường chéo của đa giác đã cho.

Câu 4 (2,0 điểm): Cho tam giác OAB vuông cân tại O, có $OA=4$. Lấy điểm M thuộc cạnh AB (M không trùng với A, B) và gọi H là hình chiếu của M trên OA. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay tam giác OMH quanh OA.

Câu 5 (4,0 điểm): Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $4a$, tam giác ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.

1. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

2. Gọi N là trung điểm cạnh SD. Tính số đo góc giữa đường thẳng NC và mặt phẳng (SAB).

Câu 6 (3,0 điểm):

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^5+xy^4=y^{10}+y^6 \\ (1+y^2)(2^x+1)=2^x+4 \end{cases}$.

2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\sqrt{3u_n^{\,2}+2},\ \forall n\geq 1 \end{cases}$. Tính tổng $S=u_1^2+u_2^2+u_3^2+...+u_{2024}^2$.

Câu 7 (1,5 điểm): Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{16-a^3}{a}+\frac{16-b^3}{b}+\frac{16-c^3}{c}$$

----- Hết-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm.

UBND TỈNH KON TUM **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12** **NĂM HỌC 2023 - 2024**
HƯỚNG DẪN CHẤM **ĐỀ THI DỰ BỊ**	**Môn**: Toán *(Hướng dẫn gồm 08 trang)*

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

1) Hướng dẫn chấm thi này chỉ trình bày các bước chính của lời giải hoặc nêu kết quả. Trong bài làm, thí sinh phải trình bày lập luận đầy đủ.

2) Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

3) Việc chi tiết hoá thang điểm (nếu có) so với thang điểm trong hướng dẫn phải đảm bảo không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong tổ chấm thi. Các điểm thành phần và điểm cộng toàn bài giữ nguyên không làm tròn.

II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu 1.1. (2,0 điểm): Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d_m): y=x+m$. Tìm m để (C) cắt (d_m) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=3\sqrt{2}$.

Đáp án và biểu điểm

Nội dung	Điểm
Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d_m) là $\dfrac{x+2}{2x-1}=x+m$ (*)	0,25
Điều kiện $x\neq\dfrac{1}{2}$. Khi đó, (*) tương đương $g(x)=0$ (1) với $g(x)=2x^2+2(m-1)x-m-2$	0,25
Từ PT(1) ta có $\begin{cases}\Delta'=(m-1)^2+2(m+2)=m^2+5>0\\ g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{5}{2}\neq 0\end{cases}$ nên (d_m) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;x_1+m),B(x_2;x_2+m)$	0,25
Với $x_1;x_2$ là hai nghiệm của (1) theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=1-m\\ x_1.x_2=\dfrac{-m-2}{2}\end{cases}$.	0,25
Khi đó, $AB=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}$	0,25
$=\sqrt{2(m^2+5)}$.	0,25
Có $AB=3\sqrt{2}\Leftrightarrow m^2+5=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-2\end{array}\right.$. Vậy $m=-2$ hoặc $m=2$.	0,5

Câu 1.2. (1,5 điểm): Cho a, b là hai số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a 2 = 3$ và $\log_b \sqrt{a} = \dfrac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_4 (ab)$.

Đáp án và biểu điểm

Nội dung	Điểm
Ta có $\log_a 2 = 3$ suy ra $a^3 = 2$	0,25
$\Leftrightarrow a = 2^{\frac{1}{3}}$.	0,25
$\log_b \sqrt{a} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{a} = b^{\frac{1}{3}}$	0,25
$\Leftrightarrow b = a^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$.	0,25
Suy ra $P = \log_4 (ab) = \log_{2^2}\left(2^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{2}}\right) = \log_{2^2}\left(2^{\frac{5}{6}}\right)$	0,25
$= \dfrac{1}{2}.\dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{12}$.	0,25

Câu 2.1. (2,0 điểm): Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$.

Đáp án và biểu điểm

Nội dung	Điểm
Tập xác định $D = \mathbb{R}$	0,25
Ta có $y' = 2(x-1).f'(x^2 - 2x)$.	0,25
$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{array}\right.$.	0,25
Ta có $f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - 2x = a \in (-\infty; -1) & (1) \\ x^2 - 2x = b \in (-1; 0) & (2) \\ x^2 - 2x = c \in (0; 1) & (3) \\ x^2 - 2x = d \in (1; +\infty) & (4) \end{array}\right.$	0,5

Vì $x^2-2x\ge -1$ nên phương trình (1) vô nghiệm, các phương trình $(2),(3),(4)$ đều có hai nghiệm phân biệt khác 1 và do b,c,d đôi một khác nhau nên các nghiệm của các phương trình $(2),(3),(4)$ cũng đôi một khác nhau.	0,25
Do đó phương trình $f'\left(x^2-2x\right)=0$ có 6 nghiệm phân biệt khác 1.	0,25
Vậy phương trình $y'=0$ có 7 nghiệm phân biệt, do đó số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ là 7.	0,25

Câu 2.2. (2,0 điểm): Cho phương trình $2\cos 2x+2m.\sin x=3m+2$.Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt trên khoảng $\left(0;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Đáp án và biểu điểm

Nội dung	Điểm
Ta có $2\cos 2x+2m.\sin x=3m+2 \Leftrightarrow -4\sin^2 x+2m.\sin x=3m$ (*)	0,25
Đặt $t=\sin x$, với $x\in\left(0;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ thì $t\in(-1;1]$, phương trình (*) trở thành $\dfrac{4t^2}{2t-3}=m$.	0,25
Nhận xét Với $t\in(-1;0]\cup\{1\}$ thì phương trình $t=\sin x$ có đúng một nghiệm trên $\left(0;\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Với $t\in(0;1)$ thì phương trình $t=\sin x$ có đúng hai nghiệm phân biệt trên $\left(0;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.	0,25
Xét hàm số $f(t)=\dfrac{4t^2}{2t-3}$ trên $(-1;1]$ có $f'(t)=\dfrac{8t(t-3)}{(2t-3)^2}$;	0.25
với $f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\in(-1;1] \\ t=3\notin(-1;1] \end{array}\right.$.	0,25
Bảng biến thiên trên $(-1;1]$. $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c} t & -1 & & 0 & & 1 \\ \hline f'(t) & \| & + & 0 & - & \| \\ \hline f(t) & -\dfrac{4}{5} & \nearrow & 0 & \searrow & -4 \end{array}$	0,5
Dựa vào bảng biến thiên và nhận xét trên ta thấy phương trình (*) có đúng hai nghiệm phân biệt trên $\left(0;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $-4<m\le -\dfrac{4}{5}$.	0,25

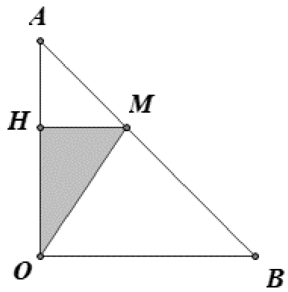
Câu 3. (2,0 điểm): Cho đa giác đều có $2n$ $(n\in\mathbb{Z},n\ge 2)$ cạnh nội tiếp đường tròn tâm O. Biết số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ đỉnh của đa giác nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ đỉnh của đa giác. Tính số đường chéo của đa giác đã cho.

Đáp án và biểu điểm

Nội dung	Điểm
+ Số tam giác tạo thành từ 3 trong $2n$ đỉnh của đa giác là C_{2n}^3.	0,5
+ Đa giác đều $2n$ đỉnh có n đường chéo đi qua tâm nên số hình chữ nhật được tạo thành từ 4 trong $2n$ đỉnh của đa giác là C_n^2.	0,5
Từ giả thiết ta có: $C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20\frac{n!}{2!(n-2)!}$.	0,5
$\Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 8$	0,25
Vậy có $C_{16}^2 - 16 = 104$ đường chéo.	0,25

Câu 4. (2,0 điểm): Cho tam giác OAB vuông cân tại O, có $OA = 4$. Lấy điểm M thuộc cạnh AB (M không trùng với A, B) và gọi H là hình chiếu của M trên OA. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay tam giác OMH quanh OA.

Đáp án và biểu điểm

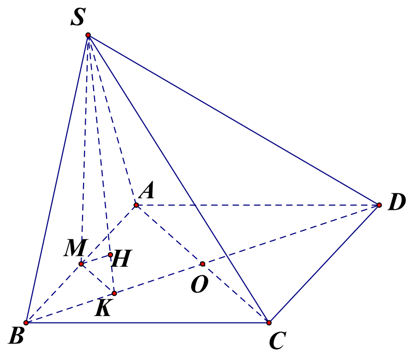


Nội dung	Điểm
Đặt $h = OH$, $0 < h < 4$.	0,25
Khi quay tam giác OMH quanh OA, ta được hình nón đỉnh O chiều cao h bán kính đáy $r = HM$.	0,25
Ta có $HM // OB$ nên $\frac{AH}{AO} = \frac{HM}{OB}$	0,25
$\Rightarrow \frac{4-h}{4} = \frac{r}{4} \Rightarrow r = 4 - h$.	0,25
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(4-h)^2.h$	0,25
$= \frac{1}{6}\pi(4-h)(4-h).2h$	0,25
$\le \frac{1}{6}\pi\left(\frac{4-h+4-h+2h}{3}\right)^3 = \frac{256\pi}{81}$.	0,25
Vậy $V_{\max} = \frac{256\pi}{81}$. Đẳng thức xảy ra khi $4 - h = 2h \Leftrightarrow h = \frac{4}{3}$	0,25

Câu 5. (4,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh $4a$, tam giác ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.

5.1(2,0 điểm): Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

Đáp án và biểu điểm

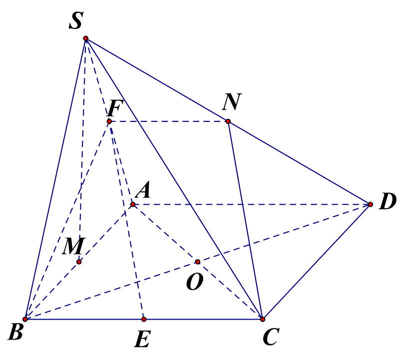


Nội dung	Điểm
Gọi M là trung điểm AB suy ra $SM \perp AB$ vì $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SM \perp (ABCD)$.	0,25
Gọi $O = AC \cap BD$ suy ra $AO \perp BD$, gọi K trung điểm BO suy ra $MK \perp BD$	0.25
Mà $SM \perp (ABCD)$ nên $SM \perp BD$. Do đó $BD \perp (SMK)$.	0.25
Kẻ $MH \perp SK$ tại H suy ra $MH \perp (SBD)$.	0,25
Do đó, $d(A;(SBD)) = 2d(M;(SBD)) = 2MH$.	0,25
Mà ta có $SM = 2a\sqrt{3}$; $MK = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{4}AC = a\sqrt{2}$.	0,25
Tam giác ΔSMK vuông suy ra $\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MK^2} + \frac{1}{MS^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{12a^2} = \frac{7}{12a^2}$ nên $MK = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$.	0,25
Suy ra $d(A;(SBD)) = \frac{4a\sqrt{21}}{7}$.	0,25

Câu 5. (2,0 điểm): Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh $4a$, tam giác ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.

5.2 Gọi N là trung điểm cạnh SD. Tính số đo góc giữa đường thẳng NC và mặt phẳng (SAB).

Đáp án và biểu điểm



Nội dung	Điểm
Gọi E, F lần lượt là trung điểm BC và SA suy ra $NF \parallel AD \parallel BC$ và $NF = \frac{1}{2}AD = EC$ nên tứ giác $NFEC$ là hình bình hành	0,25
suy ra $EF \parallel NC$.	0,25
Suy ra góc giữa NC và mặt phẳng (SAB) là góc giữa EF và mặt phẳng (SAB).	0.25
Lại có $BE \perp AB$ và $BE \perp SM$ (vì $SM \perp (ABCD)$ nên $BE \perp (SAB)$.	0,25
Suy ra góc giữa EF và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{BFE}$.	0,25
Mà ta có $BF = 2a\sqrt{3}$ (tam giác ΔSAB đều cạnh $4a$); $BE = \frac{1}{2}BC = 2a$.	0,25
Tam giác ΔBEF vuông ở B suy ra $\tan \widehat{BFE} = \frac{2a}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.	0,25
Suy ra $\widehat{BFE} = 30^0$. Vậy góc giữa NC và mặt phẳng (SAB) là 30^o.	0,25

Câu 6.1 (2,0 điểm): Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ (1+y^2)(2^x+1) = 2^x + 4 & (2) \end{cases}$

Đáp án và biểu điểm

Nội dung	Điểm
Nhận xét: $y = 0$ không thỏa mãn hệ đã cho.	0,25
Với $y \neq 0$, chia cả hai vế phương trình (1) của hệ cho y^5 ta được $\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y$.	0,25
Xét hàm số $f(t) = t^5 + t$ với $t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 5t^4 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.	0,25
Từ đó $\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow y^2 = x$ (do đó $x > 0$)	0,25
Thế $y^2 = x$ vào phương trình (2) của hệ ta được phương trình $(1+x)(2^x+1) = 2^x + 4 \Leftrightarrow x - \frac{3}{2^x+1} = 0$ (3)	0,25
Xét hàm số $f(x) = x - \frac{3}{2^x+1}$ trên $\mathbb{R}$ ta có $f'(x) = 1 + \frac{3.2^x \ln 2}{(2^x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x) = x - \frac{3}{2^x+1}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$	0,25

mà $f(1)=0$ suy ra $x=1$ là nghiệm duy nhất PT(3)	0,25
Với $x=1$ ta có $y=\pm1$ Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x;y)\in\{(1;1),(1;-1)\}$.	0,25

Câu 6.2 (1,0 điểm): Cho dãy số (u_n) xác định bởi hệ thức $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\sqrt{3u_n{}^2+2} \quad \forall n\ge 1 \end{cases}$ với mọi $n\ge1$.

Tính tổng $S=u_1^2+u_2^2+u_3^2+\ldots+u_{2024}^2$.

Đáp án và biểu điểm

Nội dung	Điểm
Ta có $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy $u_{n+1}=\sqrt{3u_n^2+2}\Leftrightarrow u_{n+1}^2=3u_n^2+2\Leftrightarrow u_{n+1}^2+1=3(u_n^2+1)$.	0,25
Đặt $x_n=u_n^2+1$ thì ta có: $x_{n+1}=3x_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Từ đây suy ra (x_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $x_1=2$, công bội là $q=3$.	0,25
Nên: $x_n=2.3^{n-1}\Rightarrow u_n^2=2.3^{n-1}-1$. $S=2.3^0+2.3^1+2.3^2+\ldots+2.3^{2023}-2024$	0,25
$=2(3^0+3^1+3^2+\ldots+3^{2023})-2024=\dfrac{2(3^{2024}-1)}{3-1}-2024=3^{2024}-2025$	0,25

Câu 7. (1,5 điểm): Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{16-a^3}{a}+\frac{16-b^3}{b}+\frac{16-c^3}{c}$$

Đáp án và biểu điểm

Nội dung	Điểm
Ta có $M=\dfrac{16-a^3}{a}+\dfrac{16-b^3}{b}+\dfrac{16-c^3}{c}=16\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)-(a^2+b^2+c^2)$ $=16\left(\dfrac{ab+bc+ca}{abc}\right)-36+2(ab+bc+ca)$	0,25
$=2(ab+bc+ca)\left(\dfrac{8}{abc}+1\right)-36$ $=2\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2abc(a+b+c)}\left(\dfrac{8}{abc}+1\right)-36$	0,25
Vì $A^2+B^2+C^2\ge AB+BC+CA$ với mọi số thực dương A,B,C nên $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\ge abc(a+b+c)=6abc$	0.25

Và $\frac{8}{abc}+1\ge 2\sqrt{\frac{8}{abc}.1}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{abc}}$	0,25
Nên $M\ge 2\sqrt{6abc+12abc}.\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{abc}}-36=12$	0,25
Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là 12.	0,25

------ Hết------