SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH PHƯỚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
CẤP TỈNH LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2023 – 2024

Môn: Toán
Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: 04/11/2023

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m+3)x+2023$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x^2-4)$. Tìm các điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^2-x)+2024.$

Câu 2. (2,0 điểm) Cho các số thực dương x,y thoả mãn:

$$\log_{8xy+2023}(16x^2+9y^2+7)+\log_{24xy+7}(8xy+2023)=2.$$

Tính giá trị của biểu thức $P=2x^2+y^2$.

Câu 3. (2,0 điểm) Cho các số thực dương x,y,z thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{x^2+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+xy}}+\frac{\sqrt{2}}{1+z}$.

Câu 4. (2,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-x^2+2(y-2x)=3+5\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{y+2}\right) \\ \sqrt{x-2}+4\sqrt{y}=-8x+y+29. \end{cases}$

Câu 5. (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=2u_n-2,\ \forall n\ge 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n=2u_n-4,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân và tìm công bội của cấp số nhân đó.

Câu 6. (2,0 điểm) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số này được lấy từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn trong đó có đúng hai chữ số lẻ và hai chữ số lẻ này không đứng cạnh nhau.

Câu 7. (4,0 điểm) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD. Biết $SO=a\sqrt{2}$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0.

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

b) Gọi K là điểm di động trong mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm SAK để biểu thức $T=\frac{SA+AK}{SK}$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 8. (2,0 điểm) Cho hình trụ có đường kính đáy bằng $4\sqrt{5}$. Một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai đáy theo hai dây cung song song MN, $M'N'$ thoả mãn $MN=8$, $M'N'=4$. Biết rằng tứ giác $MNN'M'$ có diện tích bằng 54. Tính thể tích khối trụ đã cho.

......HẾT......

- *Thí sinh* ***không*** *được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị coi thi* ***không*** *giải thích gì thêm.*

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 12 THPT
NĂM 2023 - 2024
MÔN THI: TOÁN

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1a	Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m+3)x+2023$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.	**2.0**
	Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'=x^2-2mx+2m+3\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$	
	$y'=x^2-2mx+2m+3\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \Delta'=m^2-2m-3\le 0\Leftrightarrow -1\le m\le 3.$	
	Vậy $-1\le m\le 3$.	
Câu 1b	Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x^2-4)$. Tìm các điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^2-x)+2024.$	**2.0**
	Ta có $f'(x)=x(x-2)(x+2)$ $g'(x)=(2x-1)f'(x^2-x)$	
	$\Rightarrow g'(x)=(2x-1)(x^2-x)(x^2-x-2)(x^2-x+2)$ $=(2x-1)x(x-1)(x+1)(x-2)(x^2-x+2)$	
	$g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\\ x=0\\ x=-1\\ x=1\\ x=2. \end{array}\right.$	
	Bảng xét dấu x: $-\infty$, -1, 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2, $+\infty$ $g'(x)$: $-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$ Kết luận: Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị là $x=-1,\ x=0,\ x=\frac{1}{2},\ x=1,\ x=2.$	

Bảng xét dấu (Câu 1b):

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

<table>
<tr><td>Câu 2</td><td>Cho các số thực dương x, y thoả mãn
$$\log_{8xy+2023}(16x^2+9y^2+7)+\log_{24xy+7}(8xy+2023)=2.$$
Tính giá trị của biểu thức $P=2x^2+y^2$.</td><td>2.0</td></tr>
<tr><td></td><td>Nhận xét: Với $\forall x, y>0$ ta có $\begin{cases}16x^2+9y^2+7>7\\ 8xy+2023>2023\\ 24xy+7>7.\end{cases}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Theo bất đẳng thức Cauchy ta có
$16x^2+9y^2+7\geq 2\sqrt{16x^2.9y^2}+7=24xy+7$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\Rightarrow \log_{8xy+2023}(16x^2+9y^2+7)\geq \log_{8xy+2023}(24xy+7)$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\Rightarrow \log_{8xy+2023}(16x^2+9y^2+7)+\log_{24xy+7}(8xy+2023)$
$\geq \log_{8xy+2023}(24xy+7)+\log_{24xy+7}(8xy+2023)$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có
$\log_{8xy+2023}(24xy+7)+\log_{24xy+7}(8xy+2023)$
$\geq 2\sqrt{\log_{8xy+2023}(24xy+7)\cdot\log_{24xy+7}(8xy+2023)}=2.$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi
$\begin{cases}16x^2=9y^2\\ \log_{8xy+2023}(24xy+7)=\log_{24xy+7}(8xy+2023)=1\end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases}16x^2=9y^2\\ 24xy+7=8xy+2023\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}16x^2=9y^2\\ xy=126\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2=\dfrac{189}{2}\\ y^2=168.\end{cases}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Vậy $P=2x^2+y^2=357$.</td><td></td></tr>
<tr><td>Câu 3</td><td>Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+xy}}+\dfrac{1}{\sqrt{y^2+xy}}+\dfrac{\sqrt{2}}{1+z}$.</td><td>2.0</td></tr>
<tr><td></td><td>Theo bất đẳng thức Cauchy ta có
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+xy}}\geq \frac{2}{\sqrt[4]{(x^2+xy)(y^2+xy)}}$$
$$\geq \frac{2}{\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2+xy}{2}}}$$
$$=\frac{2}{\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}}$$</td><td></td></tr>
</table>

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có

$$\frac{2}{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} \geq \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-z^2}}$$

Khi đó $P \geq \frac{2}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{\sqrt{2}}{1+z}$.

Xét hàm số $f(z) = \frac{2}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{\sqrt{2}}{1+z}$, $z \in (0;1)$

$$f'(z) = \frac{2z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2}} - \frac{\sqrt{2}}{(1+z)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{z+1}\left(\sqrt{2}z\sqrt{z+1}-(1-z)\sqrt{1-z}\right)}{(1-z)(1+z)^2\sqrt{1-z^2}}$$

$$f'(z) = \frac{\sqrt{2}(3z^3-z^2+3z-1)}{(1-z)(1+z)^2\sqrt{1-z^2}\left(\sqrt{2}z\sqrt{z+1}+(1-z)\sqrt{1-z}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(3z-1)(z^2+1)}{(1-z)(1+z)^2\sqrt{1-z^2}\left(\sqrt{2}z\sqrt{z+1}+(1-z)\sqrt{1-z}\right)}$$

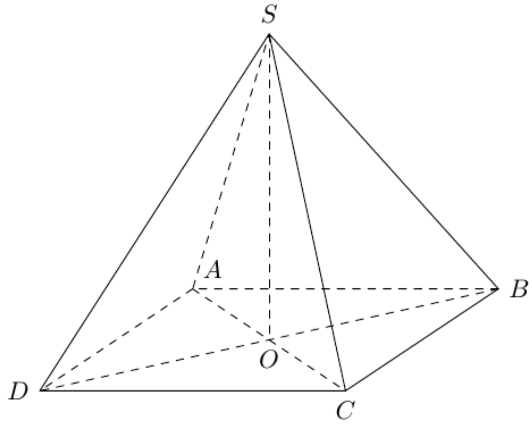
$f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên

z	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(z)$		$-$	0	$+$	
$f(z)$		$\searrow$	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	$\nearrow$	

	Suy ra $P \geq f(z) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9\sqrt{2}}{4}$. Các dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z = \frac{1}{3} \\ x = y \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{3}. \end{cases}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ khi $\begin{cases} x = y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{3}. \end{cases}$	
Câu 4	Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - x^2 + 2(y - 2x) = 3 + 5\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{y+2}\right), & (1) \\ \sqrt{x-2} + 4\sqrt{y} = -8x + y + 29, & (2) \end{cases}$	**2.0**
	Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 0. \end{cases}$	
	$(1) \Leftrightarrow (y+1)^2 + 5\sqrt{(y+1)+1} = (x+2)^2 + 5\sqrt{(x+2)+1}$	
	Xét hàm số $f(t) = t^2 + 5\sqrt{t+1}$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = 2t + \frac{5}{2\sqrt{t+1}} > 0, \forall t > 0.$	
	Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Mà $f(y+1) = f(x+2) \Leftrightarrow y + 1 = x + 2 \Leftrightarrow y = x + 1.$	
	Thế $y = x + 1$ vào (2) ta được: $\sqrt{x-2} + 4\sqrt{x+1} = -7x + 30$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2} - 1\right) + 4\left(\sqrt{x+1} - 2\right) + 7(x-3) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + 4.\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + 7(x-3) = 0$ $\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{4}{\sqrt{x+1}+2} + 7\right) = 0$	
	$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 4.$ Vì $\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{4}{\sqrt{x+1}+2} + 7 > 0, \forall x \geq 2.$	
	Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(3; 4)$.	
Câu 5	Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 2, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng	**2.0**

	dãy số (v_n) với $v_n = 2u_n - 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân và tìm công bội của cấp số nhân đó.	
	Ta có $v_{n+1} = 2u_{n+1} - 4 = 2(2u_n - 2) - 4 = 4u_n - 8.$	
	Khi đó $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4u_n - 8}{2u_n - 4}$ $= \frac{2(2u_n - 4)}{2u_n - 4}$ $= 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Suy ra (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 2.$	
Câu 6	Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số này được lấy từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9.$ Chọn ngẫu nhiên một số từ tập $S,$ tính xác suất để số được chọn là số chẵn trong đó có đúng hai chữ số lẻ và hai chữ số lẻ này không đứng cạnh nhau.	**2.0**
	Không gian mẫu $n(\Omega) = A_9^5.$	
	Biến cố A : "Số được chọn từ tập S là số chẵn trong đó có đúng hai chữ số lẻ và hai chữ số lẻ này không đứng cạnh nhau" Xét ba trường hợp (kí hiệu l là chữ số lẻ, c là chữ số chẵn) - TH1: Số có dạng $\overline{lcclc}$, có $A_5^2 A_4^3$ (cách). - TH2: Số có dạng $\overline{lclcc}$, có $A_5^2 A_4^3$ (cách). - TH3: Số có dạng $\overline{clclc}$, có $A_5^2 A_4^3$ (cách). Suy ra $n(A) = 3 \cdot A_5^2 A_4^3$ (cách).	
	Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3 \cdot A_5^2 A_4^3}{A_9^5} = \frac{2}{21}$.	
Câu 7a	Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và $BD.$ Biết $SO = a\sqrt{2},$ góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45^0.$ a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo $a.$	**2.0**



Ta có $SO \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \left(SA,(ABCD)\right) = SAO = 45^0$

$\Rightarrow$ Tam giác SAO vuông cân tại O

$\Rightarrow AO = SO = a\sqrt{2} \Rightarrow AC = 2a\sqrt{2}$

Ta có $AD^2 + DC^2 = AC^2 \Leftrightarrow 2AD^2 = 8a^2 \Leftrightarrow AD = 2a$

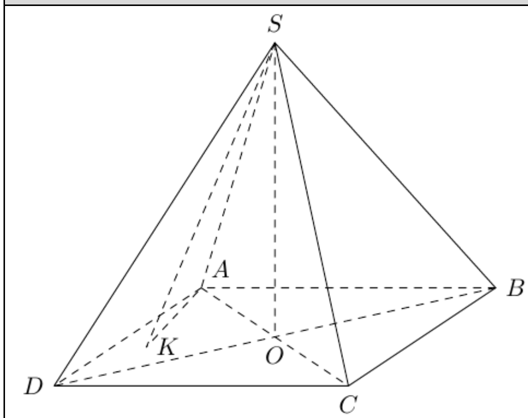
Suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot (2a)^2 = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$ (đvtt)

Câu 7b

b) Gọi K là điểm di động trong mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm SAK để biểu thức $T = \frac{SA + AK}{SK}$ đạt giá trị lớn nhất.

2.0



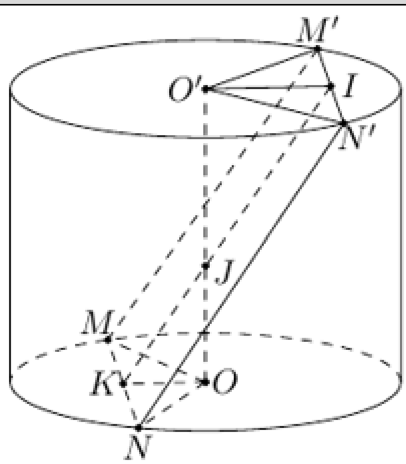
Áp dụng định lí hàm số sin vào tam giác SAK, ta có:

$$T = \frac{SA + AK}{SK} = \frac{\sin K + \sin S}{\sin A} = \frac{2\sin\frac{K+S}{2}\cos\frac{K-S}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{\cos\frac{K-S}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

Ta có: $T = \frac{\cos\frac{K-S}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{SAK}{2}}$.

Dấu bằng xảy ra khi $S = K$, hay tam giác SAK cân tại A.

Ta có $\left(SA,(ABCD)\right) = SAO = 45^0$

	và $0^0 < SAO \le SAK < 180^0 \Rightarrow 0^0 < \dfrac{SAO}{2} \le \dfrac{SAK}{2} < 90^0$. $\Rightarrow 0 < \sin\left(22,5^0\right) \le \sin\dfrac{SAK}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\sin\dfrac{SAK}{2}} \le \dfrac{1}{\sin\left(22,5^0\right)}$	
	Dấu "=" xảy ra khi $SAO = SAK$ Do đó: $T \le \dfrac{1}{\sin\dfrac{SAK}{2}} \le \dfrac{1}{\sin\left(22,5^0\right)}$. Vậy $T_{max} = \dfrac{1}{\sin\left(22,5^0\right)}$ khi K nằm trên đường thẳng AO sao cho $AK = SA$. Lúc này $SAK = 45^0$.	
Câu 8	Cho hình trụ có đường kính đáy bằng $4\sqrt{5}$. Một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai đáy theo hai dây cung song song MN, $M'N'$ thoả mãn $MN = 8$, $M'N' = 4$. Biết rằng tứ giác $MNN'M'$ có diện tích bằng 54. Tính thể tích khối trụ đã cho.	**2.0**
	 Gọi I, K lần lượt là trung điểm của $M'N'$ và MN. Ta có: 4 điểm O', O, I, K đồng phẳng.	

	Gọi J là giao điểm của OO' và IK. Khi đó IK là đường cao của hình thang $MNN'M'$. Khi đó diện tích hình thang $MNN'M'$ là $S_{MNN'M'}=\dfrac{(MN+M'N')\cdot IK}{2}\Leftrightarrow 54=\dfrac{(8+4)\cdot IK}{2}\Leftrightarrow IK=9$ Mặt khác $O'I=\sqrt{O'M'^2-M'I^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-2^2}=4$ $OK=\sqrt{OM^2-MK^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-4^2}=2$ Ta có $O'I \parallel OK\Rightarrow\dfrac{OK}{O'I}=\dfrac{JO}{JO'}=\dfrac{JK}{JI}=\dfrac{1}{2}$ Khi đó $JK=\dfrac{1}{3}IK=3$ $\Rightarrow OJ=\sqrt{JK^2-OK^2}=\sqrt{5}$ $\Rightarrow OO'=3OJ=3\sqrt{5}$ Vậy thể tích khối trụ là $V=3\sqrt{5}\cdot\pi\cdot\left(2\sqrt{5}\right)^2=60\pi\sqrt{5}$ (đvtt).	