

Câu 1. Cho dãy số (x_n) , (y_n) , (z_n) , $n = 1, 2, \dots$ được xác định như sau:

$$x_1 = 2021, x_{n+1} = 2022 + \sum_{k=1}^n (kx_k), y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}, z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[k]{x_k}}, n = 1, 2, \dots$$

- a) Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn.
b) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố p sao cho $z_p > 2021^{2022}$.

Câu 2. Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + f(y) - xy$ là ước số nguyên dương của $xf(x) + y^3$ với mọi số nguyên dương x, y .

- a) Tính các giá trị của $f(1), f(2), f(3)$.
b) Tìm tất cả các hàm số đã cho.

Câu 3. Cho m, n là các số nguyên dương. Kí hiệu $S(m, n)$ là số bộ (x_1, x_2, \dots, x_n) gồm n số nguyên x_1, x_2, \dots, x_n thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- (i) $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq n$.
(ii) $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ chia hết cho m .

Tính các giá trị của $S(m, n)$ khi:

- a) $m = 3, n = 6$.
b) $m = 47, n = 2021$.

Câu 4. Cho đường tròn (I) tiếp xúc với đường thẳng Δ . Tam giác ABC thay đổi và ngoại tiếp đường tròn (I) sao cho hai đỉnh B, C nằm trên đường thẳng Δ ; trung điểm E của đoạn thẳng AD nằm trên đường tròn (I) , trong đó D là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng Δ . Gọi (J) là đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A của tam giác ABC .

- a) Chứng minh rằng đường thẳng EJ luôn đi qua một điểm cố định.
b) Giả sử F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BEC . Đường thẳng EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BFC tại điểm thứ hai là G . Chứng minh rằng đường thẳng GJ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BFC .

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....