

Ngày thi : Thứ Ba 27/9/2022

Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian giao đề

**Bài 1. (5 điểm)** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_1 = 1$  và  $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Tìm giới hạn

$$\lim \frac{1}{\ln n} \left( \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \dots + \frac{u_n}{n} \right).$$

**Bài 2. (5 điểm)**

- Tìm tất cả các số nguyên dương  $x$  thỏa  $x^2 - x = 2^x - 2$ .
- Tìm tất cả các số nguyên dương  $x, y$  thỏa  $x > y > 2$  và  $x^y - x = y^x - y$ .

**Bài 3. (5 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  có  $B, C$  cố định ( $BC$  không đi qua  $O$ ),  $A$  là điểm thay đổi trên cung lớn  $\widehat{BC}$ . Gọi  $I, M, N$  là trung điểm của  $BC, CA$  và  $AB$ . Đường tròn qua  $M$ , tiếp xúc  $BC$  tại  $B$  và đường tròn qua  $N$ , tiếp xúc  $BC$  tại  $C$  lần lượt cắt  $IM$  và  $IN$  tại  $E$  và  $F$ . Gọi  $D$  là giao điểm của  $BE, CF$ .

- Chứng minh  $AD$  đi qua một điểm cố định.
- Gọi  $K$  là giao điểm của  $AD$  với  $EF$ . Chứng minh  $K$  thuộc một đường tròn cố định.

**Bài 4. (5 điểm)** Với  $n$  nguyên dương, một tập hợp  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  gồm các số nguyên dương được gọi là “tốt” nếu tồn tại  $n$  tập hợp  $C_1, C_2, \dots, C_n$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- Với mọi  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , các tập hợp  $C_i$  gồm  $b_i$  số nguyên liên tiếp.
  - Với mọi  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , nếu đặt  $a_i$  là tổng tất cả các phần tử của  $C_i$  thì  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ .
- Chứng minh rằng nếu  $B$  chứa ít nhất một số lẻ thì  $B$  là tập hợp tốt.
  - Hỏi có bao nhiêu tập con khác rỗng của  $\{1, 2, \dots, 100\}$  là tập tốt?

-----HẾT-----