SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỒNG NAI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

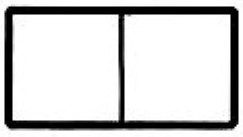
KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT 2022

Môn: Toán học
Thời gian làm bài: 180 phút
Ngày thi: 28/12/2021
(Đề thi này gồm có 01 trang, có 5 bài)

Bài 1. (4,0 điểm). Dãy số (x_n) thỏa mãn $\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_{n+1} - \sqrt{x_{n+1}} = x_n + \sqrt{x_n} + \dfrac{1}{n+4}, \, n = 1,2,3,... \end{cases}$

Tính $\lim \dfrac{x_n}{n^2}$.

Bài 2. (4,0 điểm). Để xác định ai sở hữu kho báu, Alibaba và bốn mươi tên cướp chơi trò chơi sau đây trên một bảng ô vuông vô hạn: họ luân phiên chơi, đầu tiên là Alibaba, sau đó là lần lượt mỗi tên cướp, rồi sau đó là Alibaba, rồi lại lần lượt các tên cướp; cứ tiếp tục như vậy. Mỗi lượt chơi, người chơi được phép tô màu một đoạn thẳng đơn vị là cạnh chung của hai ô vuông đơn vị nào đó của bảng miễn là đoạn đó chưa được tô. Alibaba được sở hữu kho báu nếu sau một lượt chơi của một người chơi nào đó, có một hình chữ nhật 1×2 (hoặc 2×1) mà toàn bộ biên của nó được tô nhưng đoạn thẳng đơn vị nằm bên trong thì không được tô (xem hình); nếu không thì kho báu thuộc về bốn mươi tên cướp. Hỏi Alibaba có cách nào lấy được kho báu hay không?



Bài 3. (4,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(xy) = yf(x) + x + f(f(y) - f(x))$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 4. (4,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) có H là trực tâm và AD, BE, CF là các đường cao; CH cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB ở M và BH cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC ở N. Lấy T đối xứng H qua EF và gọi L là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác THD.

1) Chứng minh LH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN.

2) DM cắt (AHB) tại điểm thứ hai là X; DN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC tại điểm thứ hai là Y. Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY. Chứng minh AP vuông góc với LD.

Bài 5. (4,0 điểm). Cho dãy số $(f_n)_{n \ge 1}$ xác định theo quy tắc $f_1 = f_2 = 1; f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ với $n = 1; 2; 3; ...$

1) Chứng minh rằng tồn tại một đa thức bậc hai, hệ số nguyên $P(x)$ sao cho phương trình $f_{5n} = f_n . P(x)$ luôn có 2 nghiệm nguyên với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

2) Cho trước số nguyên dương m. Tìm tất cả các giá trị $n \in \mathbb{Z}^+$ để $f_n^2 \equiv (-1)^{n+1} \pmod{5^m}$.

-----HẾT-----