

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất

(Đề thi gồm 01 trang, 04 câu)

Câu 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = a > 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{u_n^2}}} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$
. Chứng minh rằng

(u_n) có giới hạn, tìm $\lim u_n$.

Câu 2 (5,0 điểm). Xét các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn tính chất " Với bất kì hai số thực x, y luôn có: $|y^2 - P(x)| \leq 2|x|$ khi và chỉ khi $|x^2 - P(y)| \leq 2|y|$ ". Ta gọi S là tập tất cả các đa thức thỏa mãn điều kiện ở trên.

a) Hãy chứng minh rằng họ đa thức $P(x) = -\left(\frac{2x^2}{C} + C\right)$ với $C > 0$ và đa thức

$Q(x) = x^2 + 1$ cùng thuộc vào tập S .

b) Giả sử rằng $P(x) \in S$ và $P(0) \geq 0$. Chứng minh rằng $P(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Giả sử G, L, K lần lượt là giao điểm của các đường thẳng EF, FD, DE với BC, CA, AB tương ứng.

a) Chứng minh rằng G, L, K thẳng hàng.

b) Lấy các điểm P, Q lần lượt đối xứng với D qua B, C tương ứng. Đường tròn bàng tiếp tâm J ứng với đỉnh A của tam giác ABC tiếp xúc với BC tại N ; gọi R là điểm đối xứng với N qua J . Chứng minh (PQR) tiếp xúc với (I) .

Câu 4 (5,0 điểm). Một trường có 2007 nam và 2007 nữ. Mỗi học sinh tham gia không quá 100 câu lạc bộ; biết rằng bất kì hai bạn khác giới (1 nam và 1 nữ) tham gia ít nhất cùng một câu lạc bộ. Chứng minh rằng tồn tại một câu lạc bộ bao gồm ít nhất 11 nam và 11 nữ.

----- Hết -----

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai

(Đề thi gồm 01 trang, 03 câu)

Câu 5 (7,0 điểm). Gọi S là tập hợp tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x + f(xy)) + y = f(x)f(y) + 1, \text{ với mọi số thực } x, y \in (0; +\infty)$$

- Chứng minh rằng nếu $f \in S$ thì f là hàm số tăng ngặt.
- Chứng minh rằng S chỉ có duy nhất một phần tử là hàm số đa thức bậc nhất.

Câu 6 (6,0 điểm).

- Chứng minh rằng có vô số các số nguyên a thỏa mãn điều kiện $(a^{2^{2024}} - 1) : 2^{2026}$.
- Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn

$$p(p+1) + q(q+1) = n(n+1)$$

Câu 7 (7,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A và D là hình chiếu vuông góc của A lên BC . Gọi E, F, I lần lượt là tâm nội tiếp các tam giác ABD, ACD, ABC . Gọi M là trung điểm của BC .

- Chứng minh rằng MI là đường thẳng Euler của tam giác AEF .
- Vẽ đường tròn tâm M đường kính BC , gọi K là trung điểm của cung BC chứa điểm A . Gọi S, T lần lượt là giao điểm của AE, AF với BC ; gọi G là giao của KI với AD ; J là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF với đường tròn tâm M đường kính BC . Chứng minh rằng JG đi qua trung điểm của ST .

----- Hết -----