

ĐỀ CHÍNH THỨC

**Câu 1 (4,5 điểm)**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^6 - y^3 + x^2 - 9y^2 - 30 = 28y \\ \sqrt{2x+3} + x = y \end{cases} \text{ với } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Câu 2 (4,5 điểm)**

Cho đa thức  $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$  có  $\deg P(x) \geq 2$  và có các nghiệm là  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Chứng minh rằng: nếu  $x > b_i$ , với  $i = 1, 2, \dots, n$  thì

$$P(x+1) \left( \frac{1}{x-b_1} + \frac{1}{x-b_2} + \dots + \frac{1}{x-b_n} \right) \geq 2n^2$$

**Câu 3 (3 điểm)**

Cho đường tròn  $(O_1)$  tiếp xúc trong với đường tròn  $(O_2)$  tại điểm A. Đường thẳng qua điểm A cắt các đường tròn  $(O_1)$ ,  $(O_2)$  lần lượt tại các điểm B, C. Tiếp tuyến tại B của  $(O_1)$  cắt đường tròn  $(O_2)$  tại hai điểm D, E. Qua điểm C, kẻ hai đường thẳng tiếp xúc với  $(O_1)$  tại các điểm F, G. Chứng minh bốn điểm D, E, F, và G cùng thuộc một đường tròn.

**Câu 4 (4 điểm)**

Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi: 
$$\begin{cases} u_1 = 2023 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}^2}{u_1^2 \cdot u_2^2 \cdot \dots \cdot u_n^2}$ .

**Câu 5 (4 điểm)**

Tìm tất cả các hàm  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{ và } f(xy) = f(x)f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\frac{3}{x}\right), \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

----- HẾT -----