

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 30/ 09/ 2022

Câu 1. (4,0 điểm)

Giải hệ phương trình sau trên tập số thực

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = y \\ y^3 - 2y - 7 = z \\ (z + 3)(z^2 + 2z + 2) = x \end{cases}.$$

Câu 2. (4,0 điểm)

Cho dãy số (x_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 2022 \\ 4x_n^2 - 4(2x_n + 1)x_{n+1} + 2023 = 0, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC có trực tâm H và ba đường cao AD, BE, CF . Gọi M là trung điểm của BC , X là giao điểm của BC và EF . Đường thẳng qua X song song với HM cắt BE, CF lần lượt tại P và Q .

- Chứng minh $XAMD = AD.HM$.
- Chứng minh bốn điểm A, P, Q, H đồng viên.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho số nguyên tố $p \geq 5$.

- Đặt $n = 4^p - 1$. Chứng minh rằng n có ít nhất 3 ước nguyên tố phân biệt.
- Với a là một số tự nhiên, chứng minh rằng $2 + a + a^2 + \dots + a^{p-1}$ không là số chính phương.

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho tập hợp $X = \{1, 2, \dots, 13\}$.

- Chứng minh rằng tồn tại một họ gồm ít nhất 131 tập con có 7 phần tử của X sao cho hai tập con A, B bất kì trong họ đều thỏa mãn $|A \cap B| \leq 5$.
- Xét họ Ω gồm k tập con có 7 phần tử của X . Một tập con A của X được gọi là tập mẹ nếu như $|A| = 8$ và tồn tại $B \in \Omega$ sao cho $B \subset A$. Gọi d là số tập mẹ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{d}{k}$.

-----Hết-----

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang, 04 câu)

Môn thi: **TOÁN**
Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: **01/10/2022**

Câu 1. (5,0 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$.

1) Chứng minh rằng $(a^2 + a + b)(ab + b + 1) \geq b(2a + 1)^2$.

2) Chứng minh rằng $\frac{4b-1}{(2a+1)^2} + \frac{4c-1}{(2b+1)^2} + \frac{4a-1}{(2c+1)^2} \geq 1$.

Câu 2. (4,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(2x + f(y) + xf(y)) = x + y + xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3. (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, có đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Đường thẳng qua C song song với AB cắt BE tại M , đường thẳng qua B song song với AC cắt CF tại N . Điểm D là hình chiếu của H trên MN , I là trung điểm của BC .

1) Chứng minh AH, DI, EF đồng quy.

2) Gọi J là trung điểm của AH . Đường thẳng IJ cắt BE, CF lần lượt tại U, V . Đường tròn ngoại tiếp tam giác HUV và đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại điểm T khác H . Chứng minh ba điểm A, T, I thẳng hàng.

Câu 4. (6,0 điểm)

1) Cho số nguyên dương n và số nguyên tố lẻ p . Biết p là ước của $3^{2^n} + 1$, chứng minh $p-1$ chia hết cho 2^{n+1} .

2) Cho $2n$ điểm phân biệt trong không gian (với $n \geq 2$) sao cho trong chúng không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào cùng nằm trên một mặt phẳng. Xét $n^2 + 1$ đoạn thẳng bất kì, mỗi đoạn có hai đầu mút là hai trong số $2n$ điểm trên. Chứng minh rằng có ít nhất một tam giác được tạo thành từ $n^2 + 1$ đoạn thẳng trên.

.....*Hết*.....