SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN CỦA TỈNH
DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2022 - 2023

Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 06/10/2022
Thời gian làm bài: **180 phút**, *không kể thời gian phát đề*

Câu 1 *(5,0 điểm)*

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3}{b^2+1}+\frac{b^3}{c^2+1}+\frac{c^3}{a^2+1}.$$

Câu 2 *(5,0 điểm)*

Xét hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn: $f(3f(x)+3y)=f(3x+y)+2y$, $\forall x,y>0$.

a) Chứng minh rằng $f(x)\geq x, \forall x>0$ và $f(x)$ là hàm đồng biến.

b) Tìm tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài.

Câu 3 *(5,0 điểm)*

Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp (O). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng qua A, song song BC cắt (O) tại T khác A. Đường thẳng TD cắt (O) tại J khác T. Gọi N là trung điểm của BC và AN cắt (O) tại X khác A.

a) Chứng minh rằng BC, EF, XJ đồng quy.

b) Chứng minh rằng giao điểm của AN và EF thuộc đường thẳng qua I vuông góc với BC.

c) Gọi P,Q lần lượt là giao điểm thứ hai của JE, JF với (O), AI cắt lại (O) tại M. Chứng minh rằng đường thẳng qua A vuông góc PQ đi qua trung điểm MN.

Câu 4 *(5,0 điểm)*

Số nguyên N được gọi là *tốt* nếu tồn tại các số nguyên x,y sao cho $N=x^2+3y^2$.

a) Chứng minh rằng với số N tốt, nếu N chẵn thì $\frac{N}{4}$ là một số tốt.

b) Chứng minh rằng với số N tốt, nếu N chia hết cho 37 thì $\frac{N}{37}$ cũng là một số tốt.

------------------ HẾT ------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN CỦA TỈNH
DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2022 - 2023

Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 07/10/2022
Thời gian làm bài: **180 phút**, *không kể thời gian phát đề*

Câu 1 *(5,0 điểm)*

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1=\dfrac{2023}{2022}$ và $u_{n+1}=\dfrac{2023u_n}{2022u_n+1}$, với mọi số nguyên dương n.

a) Đặt $v_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k-1)$ với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng dãy số (v_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Tìm tất cả các số thực dương a sao cho dãy số $x_n=\sum_{k=1}^{n}a^k(u_k-1)$ có giới hạn hữu hạn.

Câu 2 *(5,0 điểm)*

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực, thỏa mãn: Nếu tồn tại các số thực a,b,c sao cho $7P(a)+10P(b)+2022P(c)=0$ thì $7a+10b+2022c=0$.

Câu 3 *(5,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) cố định, BC cố định và điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn, không cân . Lấy điểm X trên đường thẳng AC và điểm Y trên đường thẳng AB sao cho $BX, CY\perp BC$, đường tròn (AXY) cắt (O) tại L khác A.

a) Gọi AD là đường kính của (O). Chứng minh rằng đường thẳng DL luôn đi qua điểm cố định khi A thay đổi.

b) Gọi P,Q lần lượt là giao điểm thứ hai của BX, CY với đường tròn (AXY). Chứng minh rằng giao điểm của PQ và tiếp tuyến tại A của đường tròn (AXY) luôn nằm trên một đường cố định.

c) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại A của đường tròn (AXY), tiếp tuyến tại L của (O) và đường thẳng BC đồng quy.

Câu 4 *(5,0 điểm)*

Có 2022 học sinh ngồi thành một vòng tròn. Ban đầu, một học sinh nào đó sẽ được đưa cho n đồng xu, n là số nguyên dương. Ở mỗi lượt, tất cả các học sinh hiện có ít nhất 2 đồng xu sẽ chuyển 2 đồng xu sang hai học sinh ngồi bên cạnh (mỗi người 1 đồng xu).

a) Chứng minh rằng với $n<2022$, quá trình này sẽ dừng sau hữu hạn lượt.

b) Chứng minh rằng với $n=2022$, quá trình này sẽ kéo dài vô hạn.

----------------- HẾT -----------------